

Analysis 2

Sommersemester 2016

Aufgaben, Blatt **Nr. 7****Aufgaben 7-3 und 7-4 korrigiert**

Abgabe: Dienstag, 31.05.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen,
Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

7-1 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (a) f ist differenzierbar.
- (b) Die partiellen Ableitungen von f im Punkte $(0, 0)$ sind nicht stetig.

7-2 Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ für $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und folgende Beziehung gilt für alle $(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

7-3 Sei $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion und $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = g(\|x\|)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\Delta f(x) = g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|).$$

7-4 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *homogen* vom Grad α , falls für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt: $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Wir nehmen an, dass zusätzlich f zwei Mal stetig differenzierbar ist.

Beweisen Sie:

- (a) Die partiellen Ableitungen von f sind homogen vom Grad β , und bestimmen Sie diesen Grad.
- (b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt: $\langle \text{grad} f(x), x \rangle = \alpha f(x)$.
- (c) Für alle $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) x_i x_j = \alpha(\alpha - 1) f(x).$$