

Analysis 2

Sommersemester 2016

Aufgaben, Blatt **Nr. 1**

*Abgabe: Dienstag, 19.04.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen,
Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!*

1-1 Gegeben ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_m : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine Norm definiert.

1-2 (a) Zeigen Sie, dass für die Norm $\|\cdot\|_m$ aus Aufgabe 1-1 und die euklidische Norm $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_m \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_m.$$

(b) Für welche Vektoren x gilt in einer der beiden Ungleichungen in (a) Gleichheit?

1-3 (a) Zeigen Sie, dass die folgende Definition eine Topologie auf der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen definiert: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{N}$ ist offen, wenn $U = \mathbb{N}$, $U = \emptyset$ oder wenn das Komplement $\mathbb{N} - U$ endlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass für diese Topologie die Hausdorff-Trennungseigenschaft nicht erfüllt ist.

1-4 Sei \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen mit der üblichen Topologie. Auf der Menge $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wird eine Topologie wie folgt definiert: Eine Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt offen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $U \cap \mathbb{R}$ ist offen in \mathbb{R} .
- (2) Falls $\infty \in U$, so gibt es ein $R \in \mathbb{R}$, so dass $(R, \infty) \subset U$.
- (3) Falls $-\infty \in U$, so gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $(-\infty, r) \subset U$.

Zeigen Sie:

- (a) Durch diese Definition wird eine Topologie definiert.
- (b) Diese Topologie erfüllt die Hausdorff-Trennungseigenschaft.