Lösungen der Aufgaben aus Teil 1

1. Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten.

2. Ein lineares Gleichungssystem $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix $\mathbb{A}$ gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbb{A}, \vec{b})$ ist.

3. Der Wert ist 32.

4. Als allgemeine Lösung einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung n-ter Ordnung bezeichnet man eine Lösung der Differentialgleichung, die noch von n Parametern abhängt und bei der man jede Lösung der Differentialgleichung durch geeignete Wahl der Parameter erhalten kann.

5. Eine Basis eines Vektorraumes ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem dieses Vektorraumes.

6. Die Lösung der Differentialgleichung lautet $y = Ce^{-x}$, wobei C eine beliebige reelle Konstante ist.

Lösungen der Aufgaben aus Teil 2

1. a) Der Wert des Nenners des Bruches ist an der Stelle $x = 3$ offenbar Null. Der Wert des Zählers an der Stelle 3 ist -54. Somit kommen für den Grenzwert nur noch die Werte $\pm\infty$ in Frage. Der Zähler hat in einer kleinen Umgebung von 3 immer einen Wert kleiner Null. Der Nenner ist $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$. Somit bleibt der Nenner links von 3 kleiner als Null, während er rechts von 3 größer Null ist. Somit gilt $\lim_{x\to 3+0} \frac{x^4-31x^3+81x^2-27}{x^2+4x+3} = +\infty$ und $\lim_{x\to -3} \frac{x^4-31x^3+81x^2-27}{x^2+4x+3} = -\infty$. Im uneigentlichen Sinn existiert der Grenzwert somit auch nicht, da die rechts- und linksseitigen uneigentlichen Grenzwerte verschieden sind.

   b)
$$\frac{5+i}{3i+1} = \frac{(5+i)(-3i+1)}{(3i+1)(-3i+1)} = -\frac{7}{5}i + \frac{8}{10}$$
$$(4i-2)(2i+7)^2 = (4i-2)(28i+45) = 124i - 202$$

2. Zunächst wird

$$\int_\gamma \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_\gamma (xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz) =$$
$$\int_0^{2\pi} (\cos t \sin t(-\sin t) + (\sin t) \cdot 2t \cdot (\cos t) + (\cos t) \cdot 2t)\,dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (-\cos t \sin^2 t + 2t \cos t \sin t + 4t \cos t)\,dt$$

Beachtet man hier $2 \sin t \cos t = \sin 2t$, so erhält man für die rechte Seite:

$$= -\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} t \sin 2t\,dt + 4\int_0^{2\pi} t \cos t\,dt$$

Das erste Integral ergibt:

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t\,dt = \frac{1}{3} \sin^3 t|_0^{2\pi} = 0$$

Das dritte Integral rechts wird mittels partieller Integration berechnet:

$$\int_0^{2\pi} t \cos t\,dt = t \sin t|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t\,dt = 0$$

Das mittlere Integral wird auch mittels partieller Integration berechnet:

$$\int_0^{2\pi} t \sin 2t \, dt = -t \cdot \frac{1}{2} \cos 2t|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt = -\pi + 0 = -\pi$$

Also folgt

$$\int_\gamma \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\pi$$

Das Integral ist nicht wegunabhängig, wie man aus

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) \neq \frac{\partial}{\partial x}(yz)$$

sofort erkennt.

3. Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung lautet $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ und hat die doppelte Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$. Somit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}$, wobei C_1, C_2 beliebige reelle Zahlen sind.

4. Die Differentialgleichung kann für $x \neq 0$ als lineare Differentialgleichung 1. Ordnung aufgefasst werden und mit den entsprechenden Lösungsformeln aus der Vorlesung behandelt werden. Eine andere Möglichkeit ist, die Differentialgleichung als Differentialgleichung mit trennbaren Variablen. Letzteres ergibt

$$x^2 y' = x - 2xy$$

Division durch $x^2 \neq 0$ führt zu

$$y' = \frac{1 - 2y}{x}$$

woraus man erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2y}{x}$$

bzw.

$$\frac{dy}{1 - 2y} = \frac{dx}{x}$$

Integration beider Seiten liefert

$$-\frac{1}{2} \ln |1 - 2y| = \ln |x| + C_1$$

Wegen der Anfangswerte ist $x > 0$, $1 - 2y < 0$. Alos erhält man

$$\ln(2y-1) = -2\ln x + C$$

und damit

$$2y - 1 = Cx^{-2},\ C > 0$$

Daraus folgt sofort

$$y = \frac{Cx^{-2}+1}{2}$$

und aus

$$1 = \frac{C(\sqrt{2})^{-2}+1}{2}$$

folgt

$$C = 2$$

Also lautet die Lösung des AWP für $x > 0$

$$y = x^{-2} + \frac{1}{2}$$

5. Zunächst müssen die Eigenwerte bestimmt werden. Dafür ist das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbb{A}$ aufzustellen:

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0$$

und zunächst die entsprechende Determinante zu berechnen. Dies sollte so geschehen, dass man eine Nullstelle leicht sieht (ausklammern).

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & -6 \\ -1 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3+3(4+\lambda) & 3+\lambda(4+\lambda) \\ 0 & -3-\lambda & -6-2\lambda \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -3+3(4+\lambda) & 3+\lambda(4+\lambda) \\ -(3+\lambda) & -2(3+\lambda) \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 9+3\lambda & \lambda^2+4\lambda+3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(3+\lambda)(18+6\lambda-3-\lambda^2-4\lambda) = (3+\lambda)(\lambda^2-2\lambda-15) = 0$$

Es folgt $\lambda_1 = -3$, die übrigen Nullstellen erhält man als Lösung von $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$. Es folgt $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$. Der kleinste Eigenwert ist somit $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ und für diesen doppelten Eigenwert sind die Eigenvektoren zu berechnen. Wir lösen $(\mathbb{A} + 3\mathbb{E})\vec{x} = \vec{o}$. Weil -3

doppelter Eigenwert ist, muss der Rang von $\mathbb{A} + 3\mathbb{E}$ gleich 1 sein. Es genügt daher, eine Gleichung zu betrachten:

$$-x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei c_1, c_2 beliebige reelle Konstanten sind. Somit stellen die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraumes zum Eigenwert -3 dar.