Mathematik für Physiker, Komplexe Zahlen, Seite 1, [1]

Die Menge der komplexen Zahlen besteht aus allen Symbolen z der Gestalt $z = a + bi$, wobei die imaginäre Einheit i charakterisiert wird durch $i^2 = -1$ und a, b reelle Zahlen sind. Also

$$\mathbb{C} = \{a + bi | \, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Addition:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Subtraktion:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Multiplikation:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

Letztere Formel entsteht durch gewöhnliches Ausmultiplizieren der Klammern und Beachtung der Relation $i^2 = -1$.
Division: $(c + di) \neq 0$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Praktische Durchführung der Division:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)},$$

also Erweiterung des Bruches mit $c - di$. Anschließend multipliziert man Zähler und Nenner in der Weise aus, wie es die Multiplikation komplexer Zahlen vorschreibt. Danach erhält man obiges Resultat.

Für $z = a + bi$ nennt man $\overline{z} = a - bi$ die konjugiert komplexe Zahl zu z. Zur Berechnung obigen Bruches erweitert man also mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners. Für $z = a + bi$ nennt man a den Realteil von z, $a = \Re z$ und b den Imaginärteil von z, $b = \Im z$

[1] Friedbert Prüfer, 10/2002

Die komplexen Zahlen können in der **Gaußschen Zahlenebene** dargestellt werden. Dabei legt man ein gewöhnliches kartesisches Koordinatensystem zu Grunde, trägt auf der x-Achse den Realteil ab und auf der y-Achse die Anteile yi für $z = x + yi$. Also entspricht der komplexen Zahl $z = x + yi$ der Punkt (x, yi) in diesem Koordinatensystem.

Die trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen:
Sei z als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt. Den Abstand von z zum Koordinatenursprung 0 nennt man den **Betrag** von z und schreibt dafür $|z|$. Für $z = a + bi$ erhält man $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es gilt auch $z\overline{z} = |z|^2$. Das Bogenbaß $\alpha \in (-\pi, \pi]$ des vom Strahl $\overrightarrow{0z}$ und der positiven reellen Achse eingeschlossenen Winkels nennt man das **Argument von** z und schreibt dafür $\arg z$.
Die Größen $r := |z|$ und $\alpha := \arg z$ heißen die **Polarkoordinaten** der komplexen Zahl z.
Umrechnungen zwischen der Gaußschen Darstellung $z = x + yi$ und Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha$$

(Zu gegebenen Polarkoordinaten r, α berechnet man die Gaußsche Darstellung.)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\ (\alpha \geq 0 \,\text{wenn}\, y \geq 0,\ \alpha < 0 \,\text{wenn}\, y < 0)$$

Also zuerst r berechnen, dann den entsprechenden Kosinuswert bestimmen. Danach kommen i.a. zwei Werte für α in Frage, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Mittels des Vorzeichens von y entscheidet man über das Vorzeichen von α.
Sind r, α von $z \in \mathbb{C}$ bekannt, so nennt man

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

die **trigonometrische Gestalt** von z.

Exponentialdarstellung komplexer Zahlen:
Wir definieren für komplexe Zahlen $z = x + yi$ die **komplexe Exponentialfunktion**

$$e^z = e^{x+yi} := e^x(\cos y + i\sin y)$$

Für diese komplexe Exponentialfunktion gelten z.T. ähnliche Formeln wie für die reelle Exponentialfunktion, einige Formeln sind aber völlig neu. Die beiden wichtigsten werden gegeben durch

[2] Friedbert Prüfer, 10/2002

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad e^{z+2\pi i} = e^z$$

für alle $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Die erste Formel entspricht der bekannten Gleichung für die reelle Exponentialfunktion, während die zweite Formel die überraschende Tatsache ausdrückt, daß die komplexe Exponentialfunktion periodisch ist mit der Periode $2\pi i$.

Hat $z \in \mathbb{C}$ die Polarkoordinaten $r = |z|$ und $\alpha = \arg z$, dann nennt man

$$z = re^{\alpha i}$$

die **Exponentialdarstellung** von z.

Die Exponentialdarstellung ergibt leicht einige wichtige Formeln:

$$z_1 = r_1 e^{\alpha_1 i},\ z_2 = r_2 e^{\alpha_2 i} \Longrightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)i} \text{ und } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\alpha_1-\alpha_2)i},$$

Letzteres nur für $z_2 \neq 0$.

Ferner

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Winkel α.

[3] Friedbert Prüfer, 10/2002