Mathematik für Chemiker
29. Serie vom 15.7.2004

113. Es seien zwei Würfel gespielt; W sei die Zufallsvariable der resultierenden Augensumme. Die Zufallsvariable X sei die Augenzahl des ersten Würfels (weiß) mit den Augen in $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Zufallsvariable Y sei die Augenzahl des zweiten Würfels (schwarz) mit den Augen in einem analogen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. X und Y seien gleichverteilt, d.h. es ist

$$p(X = k) = p(Y = k) = \begin{cases} 1/6, & \text{für } k = 1, ..., 6 , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Man überlege sich eine Begründung der Formel für die Wahrscheinlichkeiten $p_2(W = i)$ von W=X+Y aus $\Omega_2 = \Omega \times \Omega$,

$$p_2(W = i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{6} p(X = j)\, p(Y = i - j), & \text{für } i = 2, ..., 12 , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

der sogenannten Faltungsformel. Berechnen Sie damit Erwartungswert μ, Streuung V und Standardabweichung σ für W.

114. a) Sei X eine Zufallsvariable, die sich nach der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 2$ verhält. Zeichnen Sie Dichte und Verteilungsfunktion und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten:

$$p(X \leq 2), \quad p(X > 2), \quad p(-1 < X < 4) .$$

b) Sei eine normalverteilte Zufallsvariable X auf Standardnormalverteilung normiert (z.B. die von (a) – wie macht man das?). Bestimmen Sie das kürzeste Intervall $(-a,\, a)$ mit $a > 0$, so daß gilt

$$p(-a < X < a) \geq 0.5 .$$

115. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ einer Zufallsvariable X hat die Werte:

$$f(x) = \frac{8}{x^3} , \quad \text{für } x \geq 2 , \quad \text{und } 0 \quad \text{sonst} .$$

Zeichnen Sie den Graphen, bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F(x) und zeichnen Sie auch deren Graphen, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß X Werte aus dem Intervall [10,20] annimmt. Was ist der Erwartungswert von X?

116. F(x) sei die Verteilungsfunktion und f(x) die Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen (d.h. nicht diskreten) Zufallsvariable X. Man bewerte mit *wahr* oder *falsch* die folgenden Aussagen
(? Prüfungsfragen ?):
(1) F(x) und f(x) können beliebige reelle Funktionen sein.
(2) f(x) ist eine nichtfallende Funktion.
(3) f(x) darf keine Spünge haben.
(4) f(x) kann nicht negativ sein
(5) F(x) kann Sprünge haben.
(6) F(x) nimmt Werte zwischen -1 und +1 an.
(7) Die Fläche zwischen x-Achse und F(x) ist immer gleich 1.
(8) f(x) muß stets kleiner als 1 sein.
(9) Die Fläche zwischen x-Achse und f(x) ist immer gleich 1.
(10) Die Eigenschaften von F(x) und f(x) sind mir völlig gleichgültig.