Mathematik für Chemiker
28. Serie vom 8.7.2004

109. Geben Sie Ergebnisraum Ω, Ereignisfeld $\mathcal{E}$ und die Wahrscheinlichkeiten $p(\omega_i)$ für folgende Zufallsexperimente an:
a) 1 Münzwurf, b) 1 mal würfeln, und c) (aktuell:) 5 Fußballer schießen jeder einen Elfmeter. Es interessiert die Gesamtzahl der "Tore" bzw. "Fehlschüsse".
Zeichnen Sie die Werte von $f(x_i)$ und von der Verteilungsfunktion $F(x)$ zu den Beispielen in ein Koordinatensystem ein. Bei a) und b) ist von einem ehrlichen Experiment auszugehen; bei c) sei die Einzel-Wahrscheinlichkeit eines Tores bei einem Elfer $p(T) = 0,8$.

110. Bei einem normalen Spielwürfel sei die Sechs mit einer Null überklebt. Die Zufallsvariable X sei die Augenzahl des ausgespielten Würfels mit den möglichen Ergebnissen der Augen in $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Der Würfel sei "ehrlich", d.h. es gelte $p(X = k) = 1/6$, für $k = 0, ..., 5$.
Die Zufallsvariable Y sei das Resultat von fünf Münzwürfen, wobei jeweils das Obenliegen der "Zahl" für Y gezählt werde. Offenbar hat Y die gleichen möglichen Ergebnisse wie X: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Man gehe davon aus, daß Y binomialverteilt ist mit $p = 1/2$, also

$$p(Y = k) = \binom{5}{k} \frac{1}{2^5}, \quad k = 0, ..., 5.$$

Vergleichen Sie die Funktionen $f(x_i)$ für beide Zufallsvariable graphisch. Berechnen Sie Erwartungswert μ, Streuung V und Standardabweichung σ für X und Y.

111. a) Sei X eine Zufallsvariable mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Es gelte $p(X = k) = c\,k$, für $k = 1, .., 4$. Dabei ist c ein Proportionalitätsfaktor. Bestimmen Sie den Wert c, die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_i)$ und die zugehörige Verteilungsfunktion F(x).
b) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_i)$ einer Zufallsvariable X mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{-2, 0, 2\}$ hat die Werte:

$$f(-2) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = \frac{1}{4}, \quad f(2) = \frac{1}{4}.$$

Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F(x) und zeichnen Sie ihren Graphen und berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$p(X \leq 1)\ ,\ p(X = 2)\ ,\ p(X \leq 2)\ ,\ p(0 < X \leq 2)\ ,\ p(1 \leq X \leq 2)\ .$$

112. Seien $A_i \in \mathcal{E}$ Mengen von Ereignissen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, p)$, $i = 1, ..., n$. Überlegen Sie sich eine Begründung für die sogenannte "Siebformel"

$$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \quad =$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{i<j}^{n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} p(A_i \cap A_j \cap A_k) \mp ... + (-1)^{n-1} p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)\ .$$

Zeichnen Sie eine Modell-Skizze für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.