

Mathematik für Chemiker
16. Serie vom 7.4.2004

61. Sei γ ein geschlossener Weg in der (T, v) -Ebene.

(Es ist T = absolute Temperatur,
und v = Molvolumen eines kalorisch idealen Gases.)

Das Kurvenintegral

$$Q = \int_{\gamma} \left(c_v dT + \frac{RT}{v} dv \right)$$

ist der mathematische Ausdruck eines Kreisprozesses. Q ist die Wärmemenge, die während des Kreisprozesses vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt wurde. Man berechne Q , falls γ ein achsenparalleles Rechteck ist, dessen Endpunkte wie folgt durchlaufen werden: $(T_1, v_1) \rightarrow (T_2, v_1) \rightarrow (T_2, v_2) \rightarrow (T_1, v_2) \rightarrow (T_1, v_1)$.

62. Man zeige, daß die Differentialform für $\kappa = \text{const.}$ und positiv

$$v^{\kappa-1} dT + (\kappa - 1)T v^{\kappa-2} dv ,$$

vollständiges Differential ist und suche die Stammfunktion $F(T, v)$.

63. a) Berechnen Sie $\int_B x dv$ für den folgenden Bereich

$$B = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, 6x + 3y + 2z \leq 6\}.$$

b) Berechnen Sie $\int_B (x^2 + y^2) dv$ für den folgenden Bereich

$$B = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, y \leq 1, x + z \leq 1\}$$

64. Welche der folgenden Abbildungen sind Vektorfelder auf dem jeweiligen Definitionsbereich?

(i) $f_1(x, y, z) = xyz(x^2 + y^2 + z^2)$,

(ii) $f_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz/x \\ xz/y \\ xy/z \end{pmatrix}$,

(iii) $f_3(t) = (t, t^2, t^3)$,

(vi) $f_4(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x \sin y \\ -\cos x \cos y \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie für jedes Vektorfeld, ob es ein konservatives Vektorfeld ist. Wenn ja, geben Sie die exakte Differentialform an.