Mathematica für Physiker

15. ÜbungsZusatz für 15.7.2013 oder später

Die Lösungen der Aufgaben sind nur von Teilnehmern einzusenden, die noch Extra-Punkte benötigen; an Dr. Quapp per e-mail als Notebook. Bezeichnung: VornameNameUeb15.nb

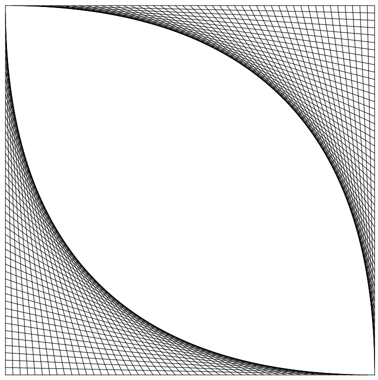
Termin: Vor der Prüfung bis Mi. 24.07.2013, 21^{00} Uhr

an: quapp@uni-leipzig.de

Jeder Teilnehmer hat seine eigene Lösung zu erstellen! Beachten Sie, dass jedwede Lösung nur mit einem verständlichen Antwortsatz voll gewertet werden kann.

Bisher vereinbarter Prüfungstermin: Do. 25.07.2013 ; Nachzügler: Mo. 29.07.2013

1.) Eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit positiven natürlichen Elementen heißt magisches 2-Quadrat, wenn alle Zeilen- und Spaltensummen sowie die Summen über die beiden Diagonalen jeweils den gleichen Wert haben. Bestimmen Sie alle magischen 2-Quadrate. (2^* Punkte)



2.) Erstellen Sie mit Mma das nebenstehende Bild, das entsteht, wenn man Punkte auf den Seiten eines Einheitsquadrates systematisch miteinander verbindet.
Hinweis: Dabei sind **Line**-Objekte verwendet worden. (3^* Punkte)

3.) Betrachten Sie das Polynom $p(x) \equiv x^3 + x + 1 \ (mod\, 31)$ über den natürlichen Zahlen modulo 31.
Gesucht sind die n aus dem Intervall $[0, 30]$ mit $p(n) \equiv 0 \ (\, mod\, 31\,)$. ($2^*$ Punkte)

4. a) Integrieren Sie $\int \frac{1}{x^n - 2x + 1}\, dx$ für $n = 2, 3, 4$. Deuten Sie die Ausgabe für $n = 4$ mithilfe des Mma Help-Systems.(2^* Punkte)
b) Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals an: $\int_2^4 \frac{1}{x^4 - 2x + 1}\, dx$. ($1^*$ Punkt)

5.) $P,\ Q$ seien Punkte, $u,\ v,\ w$ seien Vektoren im 3-dimensionalen Raum. Eine Gerade g sei definiert durch P und u, eine Ebene ε sei definiert durch Q und $v,\ w$. Es sei
$P = \{12, 3, 5\},\ Q = \{9, 8, 4\},\ u = \{1, 0, -1\},\ v = \{3, 2, 1\},\ w = \{0, 1, 4\}$.
Bestimmen Sie mit Mma den Schnittpunkt von g und ε. (2^* Punkte)

6.) Sei eine Funktion gegeben durch $f(x, y) = x + y$. Berechnen Sie $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy dx$. (2^* Punkte)

7.) Seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Mma A B, B A, die Determinanten von A und B, und den Rang von A und B. (2^* Punkte)

8.) Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y) = x^2\, y$ auf der Menge $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(2^* Punkte)

9.) Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x\, y$ auf der Menge
$M = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$. ($2^*$ Punkte)

10.) Sei $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$, und $f(x,y) = 0$ für $(x,y) = (0,0)$. Zeigen Sie: f ist stetig im Nullpunkt, und bestimmen Sie verschiedene Richtungsableitungen in diesem Punkt. (2^* Punkte)

11.) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $z = f(x,y) = y\,e^{x^2y^3}$ im Punkt $(x_o, y_o) = (1,1)$. (2^* Punkte)

12.) Berechnen Sie mit Mma ein Potential für das Vektorfeld
$f = (y\,e^{xy} + y^2\,z,\ x\,e^{xy} + 2x\,y\,z,\ x\,y^2)$.
Hinweis: Gesucht ist eine Funktion $F(x,y,z)$, deren Gradient f ist. (2^* Punkte)

13. a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = \frac{1}{2}x\,y - x^3,\ \ y(0) = -2$. ($2^*$ Punkte)
b) Berechnen Sie mittels Eulerschen Polygonzugverfahren Näherungswerte y_k bei äquidistanter Zerlegung des Intervalls [0,2] mit den Schrittweiten $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Vergleichen Sie diese mit den Funktionswerten $y(x_k)$ der exakten Lösung. (2^* Punkte)
c) Stellen Sie die 3 Polygonzüge und die exakte Lösung grafisch dar. (1^* Punkt)

14.) Sei eine Lemniskate gegeben durch

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 \ - \ 2\,a^2\,(x^2-y^2) \ = \ 0\ .$$

Die Kurve ist der Ort aller Punkte der (x,y)-Ebene, in denen das Produkt der Entfernungen von $(-a,0)$ und $(a,0),\ a > 0$ den Wert a^2 hat.
a) Zeichnen Sie mit Mma die Kurve zu einem selbst gewählten Wert von a, und prüfen Sie die obige Behauptung für einen beliebigen Kurvenpunkt nach. (2^* Punkte)
b) Offensichtlich ist die Definition eine implizite. Für das explizite $y = f(x)$ zur Kurve mit $F(x, f(x)) = 0$ kann man, ohne $f(x)$ direkt anzugeben, mithilfe der impliziten Ableitung den Anstieg in diversen Kurvenpunkten bestimmen. Berechnen Sie diesen für $x = \pm\sqrt{2}\,a$, sowie $x^2 + y^2 = a^2$, und $x = y = 0$. (3^* Punkte)

15.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung
$u_{xy} + u_y + x + y + 1 = 0$.
Hinweis: Es hilft die Substitution $u_y = q$ und die Behandlung als gewöhnliche DGl. (3^* Punkte)

16.) Zu einer regulären komplexen 2x2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
definiert man die komplexe Möbius-Transformation $M_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
a) zeigen Sie mit Mma $M_{AB}(z) = M_A(M_B(z))$. (2^* Punkte)
b) Die Möbius-Transformationen bilden bei Hintereinanderausführung eine Gruppe. Prüfen Sie dies nach. Ist die Gruppe kommutativ? (3^* Punkte)
c) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation M_A mit folgenden Werten:
$M_A(1) = -2,\ \ M_A(i) = 2 + 4i,\ \ M_A(\infty) = 2$. ($2^*$ Punkte)

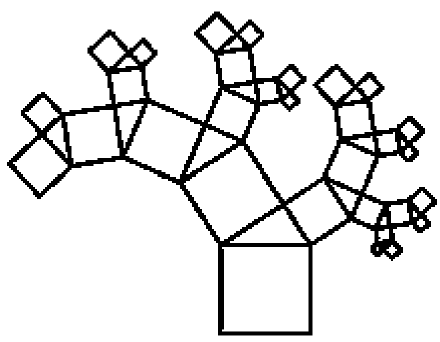


Fig. 1. Pythagoras-Baum, Stufe n=5

17.) 'Programmieraufgabe'
Ein Pythagoras-Baum entsteht folgendermassen: Auf einem Quadrat wird oben der Thaleskreis gezeichnet und beliebig unterteilt. Der Teilpunkt bildet mit den Endpunkten der Quadratseite ein rechtwinkliges Dreieck. Aus den beiden neuen Schenkeln des Dreiecks wird jeweils wieder ein Quadrat konstruiert, und so weiter. Es entsteht eine fraktale Struktur.
Programmieren Sie eine entsprechende Plotvorschrift bis zu einer gewissen Stufe n der Iteration. Zeichnen Sie das Resultat einer Rechnung mit Mma bis etwa zu $n = 10$.
(Da das Ausgangsobjekt Quadrat 4 Ecken hat, gibt es für diese Lösung 4^* Punkte)

18.) 'Programmieraufgabe'
Das Castel del Monte in Süditalien wurde in der ersten Hälfte des 13. Jhs. erbaut. Es ist in Form eines 8-Ecks errichtet, an dessen Ecken wieder 8-eckige Türmchen sitzen. Nehmen Sie diese Idee zum Vorbild für ein Fraktal, bei dem an den jeweils 7 freien Ecken einer Türmchen-Serie der Stufe n wieder je 7 kleinere Türmchen sitzen, wie in dem unten angehängten Bild angedeutet.
Programmieren Sie eine entsprechende Plotvorschrift bis zu einer gewissen Stufe n der Iteration. Zeichnen Sie das Resultat einer Rechnung mit Mma bis etwa zu $n = 5$.
(Da das Ausgangsobjekt 8 Ecken hat, gibt es für diese Lösung 8^* Punkte)