Lineare Algebra – Lösungen zur 6. Serie

24.

(a) Es sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, linear unabhängig, da nur die triviale Nulllösung das Gleichungssystem erfüllt: $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$.

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 & +2\lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +4\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array} .$$

II-I ergibt $-3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$, und
III-I ergibt $2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, also
$-11\lambda_3 = 0$. Dann folgt auch $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$.

(b) Es sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, da das Gleichungssystem erfüllt: $-3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

(c) Es sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, da das Gleichungssystem erfüllt: $-2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

25

Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ sind linear unabhängig: $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}$. ergibt ein schlichtes System: $\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \lambda_3 = 0$, und zweimal $\lambda_1 = 0$.
Damit können sie, genommen als lineare Hülle, einen Unterraum bilden, der dann 3-dimensional ist. Da die $\vec{b}_i$ mit 4 Komponenten geschrieben sind, liegt dieser Unterraum offenbar im $\mathbb{R}^4$. Somit ist m=3, n=4.

26.

Verwende: Eine lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $Kern f = \{\vec{0}\}$ ist.
(i) Wären die Bildvektoren in W linear abhängig, mit Zahlen $\lambda_i \neq 0$ wäre dann also

$$\lambda_1 f(\vec{v}_1) + f(\lambda_2 \vec{v}_2) + ... + f(\lambda_n \vec{v}_n) = \vec{0}. \qquad (*)$$

Wegen der Linearität von f wäre dann f($\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n) = \vec{0}$. Da die $\vec{v}_i$ eine Basis von V sind, ist das Argument in der Abbildung nicht der Nullvektor, folglich hätte f einen Kern ungleich 0, was ein Widerspruch ist.
(ii) Sei f injektiv, d.h. $Kern f = \{\vec{0}\}$. Sei wieder (*) als Aufgabe gestellt. Da nur $f(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$ eindeutig gilt, und aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ folgt, dass alle $\lambda_i = 0$ sind, überträgt sich diese Gleichung auch auf (*), also sind die $f(\vec{v}_i)$ auch linear unabhängig.

27.

(a) Sei $T_1 : P_n \to P_{n+1}$ eine Abbildung vermittels $T_1(p(x)) = x\,p(x)$, wenn $p(x) \in P_n$.
Behauptung: T_1 ist lineare Abbildung.

Seien $p_1, p_2 \in P_n$ beliebige Polynome, dann ist $T_1(p_1(x) + p_2(x)) = x\,(p_1(x) + p_2(x)) = x\,p_1(x) + x\,p_2(x) = T_1(p_1(x)) + T_1(p_2(x))$, und mit $\lambda \in I\!R$ ist $T_1(\lambda p_1(x)) = x\,(\lambda p_1(x)) = x\,\lambda p_1(x) = \lambda T_1(p_1(x))$. Also ist T_1 linear.
T_1 ist keine surjektive Abbildung, weil im Bild keine Konstanten vorkommen.

(b) Sei $T_2 : P_n \to P_n$ eine Abbildung vermittels $T_2(p(x)) = p(ax + b)$, wenn $p(x) \in P_n$ und $a, b \in I\!R$.
Behauptung: T_2 ist lineare Abbildung.
Seien $p_1, p_2 \in P_n$ beliebige Polynome mit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, und $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. Dann ist $T_2(p(x)) = \sum_{i=0}^{n}(a_i)(ax + b)^i \in P_n$. Für die Addition gilt: Dann ist $T_2(p + q) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)(ax + b)^i = T_2(p) + T_2(q)$ und für die Multiplikation mit einem Skalar: $T_2(\lambda p) = \sum_{i=0}^{n}(\lambda a_i)(ax + b)^i = \lambda T_2(p)$. Also ist T_2 linear.