# Analysis I

**Wintersemester**
**2026/2027**

Felix Pogorzelski, Henrik Kreidler
Marius Neubert, Konrad Zimmermann

**Blatt 4**

**Aufgaben** **Abgabe 24.11.2026**

Alle gemachten Aussagen sind sorgfältig zu begründen und herzuleiten. Machen Sie präzise Angaben zu den verwendeten Axiomen, sowie zu den verwendeten bereits bekannten Zusammenhängen.

(A1) Es sei $M$ eine Menge. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $\{|f(x)| : x \in M\}$ (von oben) beschränkt ist. Es sei $B(M)$ die Menge all dieser Funktionen und für $f \in B(M)$ definieren wir $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in M\}$. Zeigen Sie, dass $B((M), \|\cdot\|_\infty)$ mit den Verknüpfungen

$$+ : B(M) \times B(M) \to B(M), (f, g) \mapsto f + g$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times B(M) \mapsto B(M), (\alpha, f) \mapsto \alpha f,$$

wobei $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ für $x \in M$, zu einem normierten Raum wird.

(A2) Man beweise mit Hilfe der Grenzwertdefinition für Folgen in $\mathbb{R}$ (versehen mit Betragsnorm) folgende Aussagen:

(a) $\frac{n^2+42}{n^3-42} \to 0$, $n \to \infty$,

(b) $\frac{n^{42000}}{2^n} \to 0$, $n \to \infty$,

(c) $\frac{1+2^3+\ldots+n^3}{n^4} \to \frac{1}{4}$, $n \to \infty$.

Hinweis: Beginnen Sie Ihre Beweise mit "Sei $\varepsilon > 0$." Für (b) kann Aufgabe (A1) von Blatt 3 nützlich sein. In (c) zeige man zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

(A3) Es sei $X$ eine Menge, die mit der diskreten Metrik $d$ versehen wird. Zeigen Sie, dass für eine Folge $y : \mathbb{N} \to X$ und für $x \in X$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Folge $y$ konvergiert gegen $x$.

(ii) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $y_n = x$ für alle $n \geq N$.

(A4) Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Weiter sei $a : \mathbb{N} \to X$ eine Folge und es konvergiere $a$ bezüglich $\|\cdot\|$ gegen $x \in X$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $b : \mathbb{N} \to X$ mit

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

ebenso bezüglich $\|\cdot\|$ gegen $x$ konvergiert.
*Bemerkung.* In Vektorräumen lassen sich endliche Summen ebenso rekursiv definieren wie in einem Körper.

**Hinweis**. Abgabe bis 24.11., 11:15 Uhr.

## Übung

(Ü1) Wiederholen und verinnerlichen Sie präzise die folgenden Begriffe: Metrik, Norm, Dreiecksungleichung, Folge, beschränkte Folge, konvergente Folge, Grenzwert, $\varepsilon$-Umgebung

(Ü2) Es sei $X$ eine Menge und $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Metrik. Es sei $(x_n)$ eine Folge in $X$ und $x \in X$. Man betrachte die folgenden Aussagen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $\forall k \in \mathbb{N}$ | $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ | $\forall n \geq n_0$ | $d(x_n, x) < \frac{1}{k}$, |
| (ii) | $\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ | $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ | $\forall n \geq n_0$ | $d(x_n, x) < q^2$, |
| (iii) | $\forall \varepsilon > 0$ | $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ | $\forall n \geq n_0$ | $d(x_n, x) \leq \varepsilon$, |
| (iv) | $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ | $\forall \varepsilon > 0$ | $\forall n \geq n_0$ | $d(x_n, x) < \varepsilon$, |
| (v) | $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ | $\exists\, \varepsilon > 0$ | $\forall n \geq n_0$ | $d(x_n, x) < \varepsilon$. |

(a) Schreiben Sie die Aussagen (i)-(v) als vollständige Sätze ohne Verwendung von Quantoren.

(b) Untersuchen Sie, ob die Aussagen (i)-(v) jeweils dazu äquivalent sind, dass die Folge $(x_n)$ in $(X, d)$ gegen $x$ konvergiert.

(Ü3) Es sei $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ und $B(M)$ wie in Aufgabe (A1). Es sei $(f_n)$ die Folge in $B(M)$ mit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0, 1]$ die reelle Folge $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto f_n(x)$ bezüglich der Betragsnorm konvergiert. Man definiere $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und zeige, dass $f \in B(M)$.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)$ auch im normierten Raum $\big(B(M), \|\cdot\|_\infty\big)$ gegen $f$?

(Ü4) Entscheiden Sie, ob folgende Folgen $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bezüglich der Betragsnorm) konvergieren und berechnen Sie ggf. jeweils ihre Grenzwerte.

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(b) $b_n = \frac{n!}{n^n}$,

(c) $c_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+j}}$.