Analysis I

Wintersemester 2026/2027

Felix Pogorzelski, Henrik Kreidler
Marius Neubert, Konrad Zimmermann

Blatt 3

Aufgaben **Abgabe 10.11.2026**

Alle gemachten Aussagen sind sorgfältig zu begründen und herzuleiten. Machen Sie präzise Angaben zu den verwendeten Axiomen, sowie zu den verwendeten bereits bekannten Zusammenhängen.

(A1) Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4k^2 + 4k$ gilt

$$\binom{n}{2k} \geq n^k.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus Aufgabe (Ü2) im Übungsteil dieses Blattes, siehe unten.

(b) Für jedes $K \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$2^n > n^K \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Hinweis: Eine Möglichkeit ist den Aufgabenteil (a) zusammen mit dem binomischen Lehrsatz zu benutzen.

(A2) Man betrachte die Menge

$$L = \left\{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(a) Besitzt L ein Infimum, ein Supremum, ein Minimum, ein Maximum in $\mathbb{Q}$? Wenn ja, bestimmen Sie es jeweils.

(b) Klären Sie die Sachverhalte aus Aufgabenteil (a) ebenso für die Menge $L + L$ (zur Definition einer solchen Menge siehe Blatt 2).

(A3) Es sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Zeigen Sie:

(a) Es gibt *keine* surjektive Abbildung $J : X \to \mathcal{P}(X)$.

(b) Die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, bestehend aus allen Abbildungen $a : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, ist überabzählbar. *Hinweis.* Benutzen Sie den Aufgabenteil (a).

(A4) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ und $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ für $z \neq 0$.

(c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

(d) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(e) $|zw| = |z||w|$ und $|1/z| = 1/|z|$ für $z \neq 0$.

Hinweis. Abgabe bis 10.11., 11:15 Uhr über moodle2.

Übung

(Ü1) Wiederholen und verinnerlichen Sie präzise die folgenden Begriffe: Induktive Teilmenge eines angeordneten Körpers, Archimedisches Axiom, Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, Intervallschachtelungsprinzip, Mächtigkeit, Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von Mengen, komplexe Zahlen.

(Ü2) Es bezeichne wie in der Vorlesung definiert für $n \in \mathbb{N}$ and $k \in \mathbb{N}_0$ die Zahl $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Zeigen Sie die in der Vorlesung benannte Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

(Ü3) Es sei M eine endliche Menge und es sei $\{Y_m : m \in M\}$ eine Familie von jeweils abzählbaren Mengen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$Y = \bigcup_{m \in M} Y_m$$

abzählbar ist.

(Ü4) Beweisen Sie für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ die Implikation

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \geq n.$$

Hinweis: Um die Aussage für $n+1$ zu zeigen, können Sie ohne Einschränkung (Begründung!) annehmen $x_n \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$ und dann die Induktionsvoraussetzung auf die Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}$ anwenden.

Zusatzaufgabe:

(Z1) Gilt die Aussage im Aufgabenteil (b) von Aufgabe (A1) auch, wenn man 2^n ersetzt durch beliebiges a^n mit $a > 1$?

(Z2) Gilt die Aussage in Aufgabe (Ü3) auch für abzählbar unendliche Vereinigungen von abzählbaren Mengen, d.h. falls M abzählbar unendlich ist?