Analysis I

Wintersemester 2026/2027

Felix Pogorzelski, Henrik Kreidler
Marius Neubert, Konrad Zimmermann

Blatt 2

Aufgaben **Abgabe 3.11.2026**

Alle gemachten Aussagen sind sorgfältig zu begründen und herzuleiten. Machen Sie präzise Angaben zu den verwendeten Axiomen, sowie zu den verwendeten bereits bekannten Zusammenhängen.

(1) Beweisen Sie induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Was vermuten Sie allgemein für

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1), \qquad \text{wobei } m \in \mathbb{N}, m \geq 2?$$

Beweisen Sie Ihre Vermutung wieder durch Induktion.

(2) Untersuchen Sie für die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}, \\ M_2 &:= \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}, \\ M_3 &:= \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 42\} \end{aligned}$$

die Existenz von Minima, Maxima, Infima und Suprema in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(3) Für $A, B \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ seien

$$\begin{aligned} A + B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a + b\}, \\ A \cdot B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\}, \\ \lambda \cdot A &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ es existiert } a \in A \text{ mit } x = \lambda \cdot a\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, dann ist

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

(b) Es existieren nichtleere, beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$\inf(A \cdot B) \neq \inf(A) \cdot \inf(B).$$

(c) Es existiert eine nichtleere, beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$A + A \neq 2 \cdot A.$$

(4) Es sei $I = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$ und für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : I \to I,\ f(x) = x^k$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\inf f(M) = f\big(\inf M\big)$ gilt für alle $M \subseteq I$.

(b) Finden Sie eine Funktion $g : I \to I$, für welche die Aussage aus (a) mit g anstelle von f nicht gilt.

Hinweis. Abgabe bis 3.11., 11:15 Uhr über moodle2.

Übung

(1) (a) Formulieren Sie die geometrische Summenformel für einen Körper K und beweisen Sie diese durch Induktion.

(b) Wiederholen und verinnerlichen Sie präzise die folgenden Begriffe: bijektive Abbildung, angeordneter Körper, Maximum, Minimum, Supremum, Infimum, ordnungsvollständiger Körper, reelle Zahlen.

(2) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq K$ genau dann nach oben beschränkt ist, wenn $-M := (-1) \cdot M$ (siehe Vorlesung oder Aufgabe (4)) nach unten beschränkt ist. Weisen Sie nach, dass $\sup M$ genau dann existiert, wenn $\inf(-M)$ existiert und dass in diesem Fall gilt:

$$\inf(-M) = -\sup M.$$

(3) Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

(4) In der Vorlesung wurde die Bernoulli-Ungleichung gezeigt, welche besagt, dass in einem angeordneten Körper K für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{falls } x \geq -1.$$

Wie steht es mit der Gültigkeit obiger Ungleichung für $n \in \mathbb{N}$ und $-2 \leq x \leq -1$?

Zusatzaufgabe:

(Z1) Beweisen Sie, dass $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar ist.

(Z2) Finden Sie den Fehler im "Beweis" in den Vorlesungsnotizen, der vorgibt zu zeigen, dass alle Menschen dieselbe Haarfarbe haben.