Analysis I

Wintersemester
2026/2027

Felix Pogorzelski, Henrik Kreidler
Marius Neubert, Konrad Zimmermann

Blatt 1

Aufgaben **Abgabe 27.10.2026**

Alle gemachten Aussagen sind sorgfältig zu begründen und herzuleiten. Machen Sie präzise Angaben zu den verwendeten Axiomen, sowie zu den verwendeten bereits bekannten Zusammenhängen.

(1) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

(a) Beweisen Sie

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Geben Sie bei jedem Schritt an, welches Körperaxiom Sie verwenden.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $x \in K$ mit $x \neq 0$ gilt $-x \neq 0$, sowie $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.

(2) Finden Sie eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, so dass $\mathbb{F}_3$ ein Körper wird (und beweisen Sie dies). Kann man $\mathbb{F}_3$ anordnen?

Im Folgenden betrachten wir die "Verdopplungsabbildung" $2 : K \to K$, $2(a) := a + a$, und die "Vervierfachung" $4 = 2 \circ 2$.
Bemerkung. Mit der in der Vorlesung bald gewonnenen Einsicht, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen eine Teilmenge von K ist, lässt sich leicht einsehen, dass $2(a) = 2a$ und $4(a) = 4a$ für alle $a \in K$ gilt.

(3) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Beweisen Sie, dass für alle $a, b, \lambda \in K$ mit $\lambda > 0$ gilt:

(a) $2(|ab|) \leq \frac{1}{\lambda} a^2 + \lambda b^2$,

(b) $4(ab) \leq (a + b)^2$.

(4) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass für $r, s \in K$ mit $0 \leq r < s$ gilt:

$$\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}.$$

Hinweis. Abgabe bis 27.10., 11:15 Uhr über moodle2.

Übung

(1) Sei K ein Körper. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für Elemente $x, y, w, v, u \in K$.

(a) Für $x, y \neq 0$ gilt $(xy)\,(y^{-1}x^{-1}) = 1$ und insbesondere $xy \neq 0$.

(b) Für $y, w, v \neq 0$ gilt

$$\frac{x}{y}\frac{v}{w} = \frac{xv}{yw}$$
$$\frac{x}{y} + \frac{v}{w} = \frac{xw + yv}{yw}$$
$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{u}{v}} = \frac{xv}{yu}$$

(2) Sei K ein angeordneter Körper. Für $x, y \in K$ mit $x \leq y$ setze

$$\max\{x, y\} := \max\{y, x\} := y \quad \text{ und } \min\{x, y\} := \min\{y, x\} := x.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in K$

$$\begin{aligned} \max\{x, y\} &= -\min\{-x, -y\} \\ 2(\max\{x, y\}) &= x + y + |x - y| \\ 2(\min\{x, y\}) &= x + y - |x - y|. \end{aligned}$$

(3) Es sei K ein angeordneter Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für $x, y, z \in K$:

(a) $|x + y| = |x| + |y|$ genau dann wenn $x \cdot y \in K^+ \cup \{0\}$;

(b) $y \geq |x|$ genau dann wenn $-y \leq x \leq y$;

(c) $|\max\{x, z\} - \max\{y, z\}| \leq |x - y|$ und $|\min\{x, z\} - \min\{y, z\}| \leq |x - y|$.

(4) Es sei K ein angeordneter Körper. Weiter seien $b, d \in K$ mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ und $b + d \neq 0$. Man finde hinreichende und notwendige zusätzliche Bedingungen an b und d, unter denen Folgendes gilt:
Für alle $a, c \in K$, die $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ erfüllen, gilt auch $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Zusatzaufgabe:

(Z1) Lernen Sie das griechische Alphabet auswendig.

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ, ϑ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

Verinnerlichen Sie insbesondere den Unterschied von ϕ und ψ bzw. χ und ξ. Schreiben Sie den folgenden Sätze mit griechischen Buchstaben: „Max gibt Fips aus Flachs einen Klapps.“