Serie 1

1. **a)** Zeige, dass die angegeben Funktionen Lösungen für das jeweilige Anfangswertproblem sind:

(i) $y' = xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) := \frac{2}{2-x^2}$ auf $I := (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. *1 Pkt*

(ii) $y^2y' - x^2 = 0$, $y(0) = 2$; $y(x) := (x^3 + 8)^{1/3}$ auf $I := (-2, +\infty)$. *1 Pkt*

a) Skizziere die Scharen der Lösungskurven für die jeweilige Differentialgleichung:

(i) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2}$ *2 Pkte*

(ii) $\frac{dy}{dx} = -xy$ *optional: 1 Pkte*

2. Betrachte das Anfangswertproblem

$$x' = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = 0 .$$

a) Begründe warum diese Dgl. genau von dem Typ (8) aus Abschnitt I.2 im Skript ist. Was ist hier Ω? *2 Punkte*

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$. Definiere

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{27}(t-a)^3 & \text{, für } t \leq a, \\ 0 & \text{, für } a < t < b, \\ \frac{1}{27}(t-b)^3 & \text{, für } b \leq t . \end{cases}$$

Zeige, dass $x_{a,b}$ eine Lösung des AWP ist. Ist sie eindeutig? *2 Punkte*

c) Versuche, einen Grund zu finden, warum die Lösung der Dgl. trotz AWP nicht eindeutig ist. Woran könnte es liegen? *optional: 1 Punkt*

Einreichungsfrist: 21. April 2020