# Serie 7

**1.** Betrachte den durch Rotation des Kreises

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0 \quad (0 < r < a)$$

um die $z$-Achse erzeugten Torus und auf diesem Torus die durch die Punkte $(a+r,0)$, $(a-r,0)$ und $(a,r)$ erzeugten Kurven.

**a)** Berechne die geodätischen Krümmungen dieser Kurven.

**b)** Welche dieser Kurven sind geodätisch ?

**c)** Kannst Du noch weitere geodätische Kurven auf dem Torus angeben?

**2.** Es sei $U \subset \mathbb{H}$ eine Teilmenge der hyperbolischen Halbebene und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, so daß $f$ eine lokale Isometrie ist (Abwicklung). Verwende die Koordinaten $v = x$ und $u = \ln y$. Es sei dann

$$g\colon U \to \mathbb{R}^3, \quad g(u,v) = f(u,v) + f_u(u,v)\,.$$

Zeige:

**a)** Für jedes $v$ ist $u \mapsto f(u,v)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.

**b)** $f_{uu}$ steht überall senkrecht auf der Fläche $f(U)$.

**c)** Die Fläche $f$ hat konstante Gauß-Krümmung $-1$.

**d)** $f_{uv} = -f_v + Mn$, $M = h_{12}$ Koeffizient des 2. Fund.tensors.

**3.** In Fortsetzung von Aufgabe 2 berechne für

$$g\colon U \to \mathbb{R}^3, \quad g(u,v) = f(u,v) + f_u(u,v)\,.$$

**a)** Die Koeffizienten des 1. Fundamentaltensors von $g$.

**b)** Das Normalenfeld der Fläche $g$.

**c)** Die Gaußkrümmung von $g$.

**4.** Die Aufgaben 2 und 3 zusammengenommen beschreiben ein Verfahren, wie man aus einer parametrisierten Fläche mit konstanter Gaußkrümmung -1 wieder einer solche Fläche erhalten kann. Dieses Verfahren heißt Bianchi-Transformation.

**a)** Wende dieses Verfahren auf die Pseudosphäre an und beschreibe, was sich daraus ergibt.

**b)** Versuche, das Verfahren so zu verwenden, daß sich eine neuartige Fläche mit $K = -1$ finden lässt.

**Rückgabe:** Montag 26.11.07 in der Übung.