Serie 6

1. Betrachte den Rotationstorus, welcher durch Rotation des Kreises

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0,$$

um die z-Achse gebildet wird, $a > r > 0$. Der Volltorus sei nun ein Planet in einem anderen Sonnensystem, welcher um seine Symmetrie-z-Achse mit konstanter Geschwindigkeit von einer Umdrehung pro torischem Tag rotiert. Der Torianer Toralf hat von seinem Freund Ernst von der Erde ein Foucaultsches Pendel geschenkt bekommen. Was wird er über die Rotation der Schwingungsebene des Pendels feststellen? Wie schnell rotiert diese Ebene, wenn Toralf in Toriopolis mit den torischen Koordinaten (x, y, z) lebt?

2. Betrachte die Rotationsfläche

$$f(\phi, v) = (e^{-v}\cos\phi, e^{-v}\sin\phi, \psi(v)),$$
$$\text{mit } \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1-e^{-2\tau}}\,d\tau,$$

$\phi \in [0, 2\pi]$, $0 \le v < \infty$.

a) Berechne die Orthonormal-Vektoren e_ϕ und e_v und die kovarianten Ableitungen

$$\frac{\nabla}{\partial\phi} f_\phi, \quad \frac{\nabla}{\partial v} f_\phi, \quad \frac{\nabla}{\partial\phi} f_v, \quad \frac{\nabla}{\partial v} f_v\,.$$

b) Sei c eine geschlossene Kurve auf der Fläche mit $v(t) = v_o$ konstant,

$$c(t) = f(\phi(t), v_o), \quad \phi\colon [0,1] \to [0, 2\pi], \quad \phi(0) = 0,\, \phi(1) = 2\pi\,.$$

Zeige, daß der Paralleltransport entlang dieser Kurve durch die Rotation um den Winkel $2\pi e^{-v_o}$ gegeben ist.

3. Betrachte eine Rotationsfläche $f(u, v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$ mit der Profilkurvennormierung $g'^2 + h'^2 = 1$.

a) Berechne alle Christoffelsymbole $\Gamma^u_{uu}, \ldots$.

b) Leite die Geodätengleichungen her

$$\ddot{u} = \ldots \qquad \ddot{v} = \ldots\,.$$

c) Zeige: Das dynamische System der Geodätengleichungen hat zwei Erhaltungsgrößen: $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 h^2$ und $\dot{v} h^2$.

d) Zeige: Diese Erhaltungseigenschaft impliziert Eigenschaften über die maximale Annäherung an die Rotationsachse, maximalen Abstand von der Rotationsachse und Wendepunkte von Geodäten.

4. Zeige, daß die Geodätischen auf der Einheitssphäre genau die Großkreise sind.

Rückgabe: Montag 19.11.07 in der Übung.