Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Konvergenzordnung zweier Verfahren zur Lösung von linearen differentiell-algebraischen Gleichungen: Variante 2.

Aufgabenstellung

Gegeben sei eine lineare differentiell-algebraische Gleichung der Form

$$\begin{aligned} E_1(t)\dot{x} &= A_1(t)x + f_1(t), \\ 0 &= A_2(t)x + f_2(t) \end{aligned}$$

mit

$$E_1, A_1 \in C([t_0,T], \mathbb{R}^{d,n}), \quad A_2 \in C([t_0,T], \mathbb{R}^{a,n})$$

sowie

$$f_1 \in C([t_0,T], \mathbb{R}^{d}), \quad f_2 \in C([t_0,T], \mathbb{R}^{a})$$

hinreichend glatt. Außerdem sei $a + d = n$ und

$$\begin{bmatrix} E_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix} \text{ nichtsingulär für alle } t \in [t_0, T].$$

Eine Funktion $x \in C^1([t_0,T], \mathbb{R}^n)$ heißt Lösung dieser Gleichung, wenn sie diese punktweise erfüllt. Bei einem zugehörigen Anfangswertproblem fordert man noch

$$x(t_0) = x_0$$

für ein gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Man beachte, daß für die Existenz einer solchen Lösung zwingend $A_2(t_0)x_0 + f_2(t_0) = 0$ gelten muß.
Zur numerischen Lösung eines solchen Anfangswertproblems kann man das Intervall $[t_0, T]$ äquidistant unterteilen gemäß

$$t_i = t_0 + ih, \quad h = (T - t_0)/N$$

und die differentiell-algebraische Gleichung entsprechend

$$\begin{aligned} E_1(t_i + \varrho_j h)\frac{1}{h}(v_{j0}x_i + \sum_{l=1}^{k} v_{jl}x_{il}) &= A_1(t_i + \varrho_j h)(u_{j0}x_i + \sum_{l=1}^{k} u_{jl}x_{il}) + f_1(t_i + \varrho_j h) \\ 0 &= A_2(t_i + \sigma_j h)x_{ij} + f_2(t_i + \sigma_j h) \end{aligned}$$

mit $j = 1, \ldots, k$ diskretisieren, welches zu gegebenem x_i die Approximation $x_{i+1} = x_{ik}$ festlegt. Man implementiere die durch

$$
\begin{aligned}
k = 1, \quad & \varrho_1 = 1/2, \quad && u_{10} = 1/2, \quad && u_{11} = 1/2, \\
& \sigma_1 = 1, && v_{10} = -1, && v_{11} = 1
\end{aligned}
$$

sowie durch

$$
\begin{aligned}
k = 2, \quad & \varrho_1 = (3-\sqrt{3})/6, \quad && u_{10} = (1+\sqrt{3})/6, \quad && u_{11} = 2/3, \quad && u_{12} = (1-\sqrt{3})/6, \\
& \varrho_2 = (3+\sqrt{3})/6, && u_{20} = (1-\sqrt{3})/6, && u_{21} = 2/3, && u_{22} = (1+\sqrt{3})/6, \\
& \sigma_1 = 1/2, && v_{10} = -1-2\sqrt{3}/3, && v_{11} = 4\sqrt{3}/3, && v_{12} = 1-2\sqrt{3}/3, \\
& \sigma_2 = 1, && v_{20} = -1+2\sqrt{3}/3, && v_{21} = -4\sqrt{3}/3, && v_{22} = 1+2\sqrt{3}/3
\end{aligned}
$$

gegebenen Verfahren. Man bestimme außerdem (bei gegebener exakter Lösung) den Fehler

$$E_N = \|x(T) - x_N\|.$$

Für verschiedene Werte N_1, N_2 für N mit zugehörigen Schrittweiten h_1, h_2 bestimme man gemäß

$$p \doteq \frac{\log E_{N_1} - \log E_{N_2}}{\log h_1 - \log h_2}$$

numerisch die Ordnung des Verfahrens.
Als Testbeispiele verwende man

$$
\begin{aligned}
& \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \exp(t) + \cos(t), \\
& x_2 = \exp(t), \\
& x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad T = 1
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
& \dot{x}_2 + c x_2 + c\omega \cos(\omega t) = 0, \\
& x_1 + \sin(\omega t) = 0, \\
& -c(x_2 + \omega \cos(\omega t)) + \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t) - x_3 = 0, \\
& x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 50, \quad T = 0.01
\end{aligned}
$$

mit $c = 1/2$ und $\omega = 100$. Man überlege sich eigene Testbeispiele unterschiedlicher Größe insbesondere mit zeitabhängigen Koeffizienten.

Quellen

$\emptyset$