Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Konvergenzordnung von Kollokationsverfahren zur Lösung von Randwertproblemen.

Aufgabenstellung

Gegeben sei ein Randwertproblem der Form

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad r(x(a), x(b)) = 0,$$

wobei $f\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $r\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Die Funktionen f und r seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Bei einem Kollokationsverfahren wird das Problem folgendermaßen diskretisiert. Man wählt zunächst ein Gitter gemäß

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b.$$

Statt einer tatsächlichen Lösung $x \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ sucht man eine approximative Lösung $x_\pi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, die auf jedem Teilintervall in jeder Komponente mit einem (skalaren) Polynom vom Grad k, $k \in \mathbb{N}$, übereinstimmt. Ein Polynom vom Grad k ist durch $k + 1$ geeignete Bedingungen festgelegt. Insgesamt benötigen wir also $(k + 1)Nn$ skalare Gleichungen. Bezeichnet $x_{\pi,i}$ die Einschränkung von x_π auf $[t_i, t_{i+1}]$ für $i = 0, \ldots, N - 1$, so liefert die Forderung nach Stetigkeit von x_π die $(N - 1)n$ skalaren Bedingungen

$$x_{\pi,i-1}(t_i) = x_{\pi,i}(t_i), \quad i = 1, \ldots, N - 1.$$

Die Forderung, daß x_π der Randbedingung genügen soll, liefert die n skalaren Bedingungen

$$r(x_\pi(a), x_\pi(b)) = 0.$$

Die noch fehlenden kNn Bedingungen wählt man wie folgt. Ausgehend von Werten ϱ_j, $j = 1, \ldots, k$, mit

$$0 \leq \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{k-1} < \varrho_k \leq 1$$

definiert man die sogenannten Kollokationspunkte

$$t_{ij} = t_i + \varrho_j h_i, \quad h_i = t_{i+1} - t_i, \quad j = 1, \ldots, k, \quad i = 0, \ldots, N - 1.$$

Damit fordert man schließlich

$$\dot{x}_{\pi,i}(t_{ij}) = f(t_{ij}, x_{\pi,i}(t_{ij})), \quad j = 1, \ldots, k, \quad i = 0, \ldots, N - 1.$$

Man beachte, daß man im allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen hat.

Man implementiere das oben beschriebene Kollokationsverfahren, indem man für die Darstellung der Polynome geeignete Basen wählt und die obigen Forderungen in den zugehörigen Koeffizienten formuliert. Das so entstehende nichtlineare Gleichungssystem löse man mit dem Newton-Verfahren, wobei man die benötigten Jacobi-Matrizen etwa durch Differenzenverfahren approximiert. Für ϱ_j, $j = 1, \ldots, k$, verwende man

(a) $k = 1, \quad \varrho_1 = \frac{1}{2},$

(b) $k = 1, \quad \varrho_1 = 0,$

(c) $k = 2, \quad \varrho_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3},\ \varrho_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3},$

(d) $k = 2, \quad \varrho_1 = \frac{1}{3},\ \varrho_2 = 1,$

(e) $k = 2, \quad \varrho_1 = 0,\ \varrho_2 = 1,$

(f) $k = 3, \quad \varrho_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{15},\ \varrho_2 = \frac{1}{2},\ \varrho_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{15},$

(g) $k = 3, \quad \varrho_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6},\ \varrho_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6},\ \varrho_3 = 1,$

(h) $k = 3, \quad \varrho_1 = 0,\ \varrho_2 = \frac{1}{2},\ \varrho_3 = 1.$

Man teste die Implementierung unter anderem an

$$\ddot{x} = -x, \quad x(0) = 0, \quad x(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

und

$$\ddot{x} = 2x^3, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = \tfrac{1}{2}.$$

Dabei wähle man zu gegebenem N das Gitter äquidistant und bestimme die Fehler

$$\begin{aligned}
E_N^{\text{glob}} &= \max_{i=0,\ldots,10N} \|x_\pi(a + i\tfrac{h}{10}) - x(a + i\tfrac{h}{10})\|_\infty, \\
E_N^{\text{col}} &= \max_{\substack{i=0,\ldots,N-1 \\ j=1,\ldots,k}} \|x_\pi(t_{ij}) - x(t_{ij})\|_\infty, \\
E_N^{\text{grid}} &= \max_{i=0,\ldots,N} \|x_\pi(t_i) - x(t_i)\|_\infty,
\end{aligned}$$

wobei x die tatsächliche Lösung bezeichnet, und Schätzungen der zugehörigen Konvergenzordnungen $p^{\text{glob}}, p^{\text{col}}, p^{\text{grid}}$ gemäß

$$p = \frac{\log E_N - \log E_{2N}}{\log 2}.$$

Quellen

$\emptyset$