Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Implementierung des Einfachschießverfahrens zur Lösung von Randwertproblemen.

Aufgabenstellung

Gegeben sei ein Randwertproblem der Form

$$y' = f(x, y), \qquad r(y(a), y(b)) = 0,$$

wobei $f\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $r\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Bezeichnet man die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \qquad y(a) = u$$

mit $y(x; a, u)$, so erfüllt die Lösung des Randwertproblems die Bedingung

$$r(u, y(b; a, u)) = 0.$$

Bei vorausgesetzter eindeutiger Lösbarkeit des Anfangswertproblems ist dies nichts anderes als ein nichtlineares Gleichungssystem für u, das man mit dem Newton-Verfahren lösen kann. Man implementiere dieses Newton-Verfahren, indem man statt der exakten Lösung der auftretenden Anfangswertprobleme die numerische Lösung des Programmpakets `DIFEX1` bei hoher Genauigkeit (beispielsweise `TOL=1.D-12`) verwendet und die benötigten Jacobi-Matrizen E durch Differenzenquotienten gemäß

$$Ee_i = \frac{r(u + he_i, y(b; a, u + he_i)) - r(u, y(b; a, u))}{h},$$

wobei e_i der i-te kanonische Basisvektor ist und etwa $h = 10^{-7}$ ist, approximiert. Die Newton-Iteration kann abgebrochen werden, wenn die euklidische Norm der Korrektur unter 10^{-5} fällt. Die Implementierung ist an den folgenden drei Beispielen zu testen, wobei zu beachten ist, daß man diese erst auf Probleme erster Ordnung transformieren muß, um sie auf die obige Form zu bringen.
Als erstes Testbeispiel verwende man das Beispiel aus der Anlage. Man verifiziere hier beide Lösungen numerisch. Als zweites Testbeispiel nehme man

$$y'' = -\frac{3\tau}{(\tau + x^2)^2} y, \quad y(0.1) = -y(-0.1) = \frac{0.1}{\sqrt{\tau + 0.01}},$$

etwa mit $\tau = 0.02$. Als drittes Testbeispiel verwende man

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad g = 9.81$$

mit den Randbedingungen

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 10, \quad \dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 = v^2, \quad x(T) = 200, \quad y(T) = 0.$$

Hierbei ist zu beachten, daß T selbst unbekannt ist. Man muß deshalb das Intervall $[0, T]$ durch eine Zeitskalierung auf $[0, 1]$ transformieren. Man erhält dann ein Randwertproblem der obigen Form, wenn man die triviale Differentialgleichung $\dot{T} = 0$ hinzunimmt. Den Parameter v bestimme man experimentell so, daß das entstehende Randwertproblem lösbar ist.

Quellen

Das beiliegende Beispiel ist dem Buch

> Stoer/Bulirsch: Einführung in die Numerische Mathematik II,
> Springer-Verlag.

entnommen. Das Programmpaket `DIFEX1` erhält man über die `URL`

`http://elib.zib.de/pub/elib/codelib/difex1/`.