Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Implementation eines Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahrens mit Schrittweitensteuerung.

Aufgabenstellung

Eine Verfahrensklasse zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, sind Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren. Diese können in der Form

$$\begin{aligned} k_i &= hf(x_0 + c_i h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad i = 1, \ldots, s, \\ y_1 &= y_0 + \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \\ \hat{y}_1 &= y_0 + \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i k_i \end{aligned}$$

geschrieben werden.
Die Verfahren sind so konstruiert, daß der Wert $\hat{y}_1$ im Vergleich zu y_1 in einem gewissen Sinn besser ist. Das wird dann dazu genutzt, die Schrittweite h an den jeweiligen Lösungsverlauf anzupassen. Man kann dabei folgendermaßen vorgehen. Man schätzt den aktuellen Diskretisierungsfehler durch

$$\mathtt{ERR} = \|\hat{y}_1 - y_1\|.$$

Gibt man einen maximal zulässigen Fehler $\mathtt{TOL} > 0$ vor, so gehört dazu eine "optimale" Schrittweite

$$\overline{h} = \mathtt{RED} \cdot h \cdot \sqrt[p+1]{\frac{\mathtt{TOL}}{\mathtt{ERR} + \mathtt{SAV}}},$$

etwa mit $\mathtt{RED} = 0.9$ und $\mathtt{SAV} = \mathtt{eps}$, wobei p die zu y_1 gehörige sogenannte Ordnung des Verfahrens ist. Zusätzlich wird $\overline{h}$ eventuell noch so abgeändert, daß $\overline{h}$ der Bedingung

$$\mathtt{RMIN} \leq \frac{\overline{h}}{h} \leq \mathtt{RMAX},$$

etwa mit $\texttt{RMIN} = 0.2$ und $\texttt{RMAX} = 2$, genügt. Gilt nun $\texttt{ERR} \leq \texttt{TOL}$, so wird der aktuelle Schritt akzeptiert und der nächste Schritt mit $\overline{h}$ versucht, wobei y_1 oder $\hat{y}_1$ die Rolle von y_0 übernimmt und x_0 durch x_1 ersetzt wird. Ansonsten wird der Schritt verworfen und mit $\overline{h}$ wiederholt. Diese Prozedur wird solange durchgeführt, bis ein vorgegebener Endpunkt für x erreicht ist.
Ein konkretes Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren ist das auf Dormand und Prince zurückgehende Verfahren DOPRI45 mit der Ordnung $p = 4$. Die zugehörigen Koeffizienten $a_{ij}, b_i, \hat{b}_i, c_i,\ i, j = 1, \ldots, s$, findet man in der einschlägigen Literatur.
Man implementiere dieses Verfahren samt der oben beschriebenen Schrittweitensteuerung und teste es an einer Reihe von Problemen aus der Literatur.

Quellen

$\emptyset$