Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Experimentelle Bestimmung der internen Ordnungen von Runge-Kutta-Verfahren.

Aufgabenstellung

Eine Verfahrensklasse zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, sind Runge-Kutta-Verfahren. Diese können in der Form

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(Y_j), \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(Y_i)$$

geschrieben werden. Dabei ist h die Schrittweite und y_1 eine numerische Approximation an $y(x_1)$, $x_1 = x_0 + h$. Ein konkretes Verfahren ist durch Angabe der Koeffizienten a_{ij} und b_i festgelegt. Wendet man dieses Verfahren auf die skalare lineare Gleichung

$$y' = \lambda y$$

an, so ergibt sich der Vektor $Y = (Y_1, \ldots, Y_s)^T$ aus dem linearen Gleichungssystem

$$(I - zA)Y = ey_0, \quad z = h\lambda, \quad e = (1, \ldots, 1)^T.$$

Setzt man

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij},$$

so ist Y_i eine Approximation an $y(x_0 + c_i h)$. Macht man für $E = |y(x_1) - y_1|$ die Modellannahme $E = Ch^{p+1}$ bzw. $\log E = (p+1)\log h + \log C$, so kann man p bestimmen, indem man E für verschiedene h berechnet. Das gleiche gilt für die Größen $E_i = |y(x_0 + c_i h) - Y_i|$ mit der Modellannahme $E_i = C_i h^{p_i+1}$. Für $\lambda = \pm 1$ bestimme man zumindest für die Runge-Kutta-Verfahren in der Anlage auf diese Weise experimentell jeweils die Größen p und p_i.

Quellen

Die beigelegten Kopien sind dem Buch

> Hairer/Nørsett/Wanner: Solving Ordinary Differential Equations I — Nonstiff Problems, Springer-Verlag.

entnommen.