Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Eine Barriere-Strafmethode zur Lösung linearer Optimierungsprobleme.

Aufgabenstellung

Zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen

$$c^T x = \min \text{ unter den Nebenbedingungen } Ax = b,\ x \geq 0,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit vollem Zeilenrang, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$, kann man das unbeschränkte Optimierungsproblem

$$f(x) = c^T x + \mu(Ax - b)^T(Ax - b) + \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) = \min$$

etwa mit $\varphi(t) = -\log t$ oder $\varphi(t) = 1/t$ für hinreichend großes $\mu > 0$ betrachten. Dabei kann man folgendermaßen iterativ vorgehen. Zu gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ setzt man

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$$

mit der Schrittlänge $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und der Abstiegsrichtung $d_i \in \mathbb{R}^n$. Wählt man

$$d_i = -\operatorname{grad} f(x_i),$$

so spricht man von der Methode des steilsten Abstiegs. Man implementiere diese Methode mit folgender Strategie zur Anpassung der Schrittlänge α_i, wobei α_0 gegeben sei.
Gilt für das aktuelle α_i

$$f(x_i + \alpha_i d_i) \geq f(x_i),$$

so halbiere man α_i und versuche den Schritt erneut. Andernfalls akzeptiere man den Schritt und setze

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i.$$

Ist sogar

$$f(x_i + 2\alpha_i d_i) < f(x_i + \alpha_i d_i),$$

so setze

$$x_{i+1} = x_i + 2\alpha_i d_i, \quad \alpha_{i+1} = 2\alpha_i.$$

Setze die Rechnung mit dem nächsten Schritt fort.
Man überlege sich ein Abbrechkriterium und teste das Verfahren an einer Reihe von Problemen unterschiedlicher Größe. Außerdem experimentiere man mit verschiedenen Wahlen von μ und vergleiche die beiden Möglichkeiten für φ.

Quellen

$\emptyset$