Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Eine Innere-Punkte-Methode zur Lösung linearer Optimierungsprobleme: Variante 2.

Aufgabenstellung

Zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen

$$c^T x = \min \text{ unter den Nebenbedingungen } Ax = b,\ x \geq 0,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit vollem Zeilenrang, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$, soll folgende Innere-Punkte-Methode implementiert werden. Ausgehend von Startdaten $w = (x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ mit $x, s > 0$, etwa $x = s = e = (1, \ldots, 1)^T$, bestimmt man eine Korrekturrichtung $\Delta w = (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,s) & 0 & \frac{\partial}{\partial s}\Phi(x,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ \Phi(x,s) \end{bmatrix},$$

wobei

$$\Phi(x,s) = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, s_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, s_n) \end{bmatrix}$$

mit der sogenannten Fischer-Burmeister-Funktion

$$\varphi(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2} - u - v.$$

Dabei setze man formal

$$\tfrac{\partial}{\partial u}\varphi(u,v) = \tfrac{\partial}{\partial v}\varphi(u,v) = -1$$

für $\sqrt{u^2 + v^2} \leq \mathrm{eps}$. Die neue Näherung

$$\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) = w + \alpha \Delta w$$

erhält man dadurch, daß man $\alpha \in (0, 1]$ so wählt, daß $\tilde{x}, \tilde{s} > 0$ gilt. Man iteriert dann, bis $\|\Delta w\|_2$ hinreichend klein ist.
Man teste die Implementierung an einer Reihe von Problemen unterschiedlicher Größe. Außerdem überprüfe man, was passiert, wenn man nicht dämpft, d. h. wenn man immer $\alpha = 1$ wählt.

Quellen

$\emptyset$