Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Bestimmung der singulären Werte einer Matrix.

Aufgabenstellung

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ besitzt eine sogenannte Singulärwertzerlegung der Form

$$U^T AV = \Sigma$$

mit orthogonalen Matrizen U, V sowie $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$, $s = \min\{m, n\}$, wobei die Singulärwerte $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ unter der Bedingung

$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_s \geq 0$$

eindeutig bestimmt sind.

Zur numerischen Bestimmung der Singulärwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ kann man folgendermaßen vorgehen, wobei wir o. E. annehmen können, daß $m \geq n$ gilt. Zunächst gibt es eine Householder-Transformation P derart, daß

$$PA = \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right].$$

Entsprechend gibt es eine Householder-Transformation $\tilde{P}$ derart, daß

$$\left[\begin{array}{c|c} b_{11} & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{P} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} b_{11} & b_{12} & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\hat{A}} \end{array}\right].$$

Man kann nun mit $\hat{A}$ statt A fortfahren und erhält so induktiv eine Zerlegung von A der Form

$$A = QB\tilde{Q}$$

mit orthogonalen Matrizen Q und $\tilde{Q}$ sowie einer bidiagonalen Matrix B, d. h.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & & \\ & b_{22} & b_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

Dabei hat B die gleichen Singulärwerte wie A.

Man kann nun iterativ folgendermaßen vorgehen. Zunächst bestimmt man eine Givens-Rotation, die den (2,1)-Eintrag von $B^T B$ eliminieren würde und wendet diese in transponierter Form von rechts auf B an. Dabei wird die Bidiagonalgestalt von B zerstört. Um diese wieder herzustellen, bestimmt man eine Givens-Rotation, die den (2,1)-Eintrag mit Hilfe der ersten Zeile annulliert, dann eine Givens-Rotation, die den (1,3)-Eintrag mit Hilfe der zweiten Spalte annulliert, dann eine Givens-Rotation, die den (3,2)-Eintrag mit Hilfe der zweiten Zeile annulliert, dann eine Givens-Rotation, die den (2,4)-Eintrag mit Hilfe der dritten Spalte annulliert, usw. (sogenanntes chasing). Am Ende dieses Prozesses hat man wieder eine Bidiagonalmatrix vorliegen, die die gleichen Singulärwerte wie A besitzt.

Man kann zeigen, daß bei Iteration dieses Prozesses unter schwachen Voraussetzungen eine Folge von Bidiagonalmatrizen erzeugt wird, die gegen eine Diagonalmatrix konvergiert. Insbesondere konvergieren die Diagonaleinträge gegen die Beträge der Singulärwerte von A.

Man schreibe ein Programm, das zu gegebenem A wie oben angegeben die zugehörigen Singulärwerte bestimmt, und teste es an einer Reihe von Matrizen unterschiedlicher Größe.

Quellen

$\emptyset$