Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Bestimmung des Spektrums einer symmetrischen Matrix mittels Transformation auf Tridiagonalgestalt und Chasing.

Aufgabenstellung

Zur numerischen Bestimmung des Spektrums einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ kann man folgendermaßen vorgehen. Es gibt es eine Householder-Transformation P derart, daß

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \end{array}\right]$$

mit $a^T = [\tilde{a}_{12}\, 0\, \cdots\, 0]$ und symmetrischem $\tilde{A}$. Man kann nun mit $\tilde{A}$ statt A fortfahren und erhält so induktiv eine symmetrische Tridiagonalmatrix T, die zu A ähnlich ist und damit die gleichen Eigenwerte wie A besitzt. Anschließend bestimmt man eine Givens-Rotation, die von links den (2,1)-Eintrag von T eliminieren würde und wende diese von links und transponiert von rechts auf T an. Dabei wird die Tridiagonalgestalt von T zerstört. Um diese wieder herzustellen, bestimmt man eine Givens-Rotation, die den (3,1)-Eintrag mit Hilfe der zweiten Zeile annulliert und wendet diese von links und transponiert von rechts an. Dann bestimmt man eine Givens-Rotation, die den (4,2)-Eintrag mit Hilfe der dritten Zeile annulliert und wendet diese von links und transponiert von rechts an, etc. (sogenanntes chasing). Am Ende dieses Prozesses hat man wieder eine symmetrisch Tridiagonalmatrix vorliegen, die zu A ähnlich ist und damit die gleichen Eigenwerte wie A besitzt. Man kann zeigen, daß bei Iteration dieses Prozesses unter schwachen Voraussetzungen eine Folge von symmetrischen Tridiagonalmatrizen erzeugt wird, die gegen eine Diagonalmatrix konvergiert. Insbesondere konvergieren die Diagonaleinträge gegen die Eigenwerte von A. Man schreibe ein Programm, das zu gegebenem symmetrischem A wie oben angegeben die zugehörigen Eigenwerte bestimmt, und teste es an einer Reihe von Matrizen unterschiedlicher Größe.

Quellen

$\emptyset$