Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

# Numerisches Praktikum

### Thema

Rayleigh-Quotienten-Iteration mit Deflation.

### Aufgabenstellung

Zur Bestimmung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ kann man wie folgt vorgehen. Zu einem hinreichend allgemein gewähltem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bestimmt man den sogenannten Rayleigh-Quotienten

$$\mu_0 = \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T x_0}.$$

Ist $A - \mu_0 I$ singulär, so ist $\mu_0$ Eigenwert von $A$ mit Eigenvektor $x_0$. Ansonsten berechnet man $z$ aus

$$(A - \mu_0 I)z = x_0$$

und setzt

$$x_1 = z / \|z\|_2.$$

Induktiv erhält man so Folgen $\{\mu_i\}$ und $\{x_i\}$, die entweder mit einem Eigenwert bzw. Eigenvektor von $A$ abbrechen oder im Fall von Konvergenz (Abbrechkriterium?) solche als Grenzwert besitzen. Hat man auf diese Weise einen Eigenwert $\lambda$ mit zugehörigem Eigenvektor $x$, wobei $x^T x = 1$ sei, bestimmt, so kann man $A$ so transformieren, daß der $n$-te kanonische Basisvektor zum Eigenvektor wird. Dazu wählt man $P$ als Householder-Transformation mit

$$Px = \pm e_n.$$

Wegen

$$Ax = \lambda x \quad \Longleftrightarrow \quad PAP(Px) = \lambda(Px) \quad \Longleftrightarrow \quad PAPe_n = \lambda e_n$$

hat $PAP$ die Gestalt

$$PAP = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Da die Matrizen $A$ und $PAP$ sowohl kongruent wie auch ähnlich sind, ist $\tilde{A}$ symmetrisch und besitzt bis auf $\lambda$ die gleichen Eigenwerte wie $A$. Damit kann man mit Hilfe von $\tilde{A}$ mit der obigen Iteration den nächsten Eigenwert von $A$ berechnen und erhält so induktiv alle Eigenwerte von $A$.

Man implementiere das oben beschriebene Verfahren zur Berechnung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix und teste es an Hand verschiedener Matrizen unterschiedlicher Größe.

**Quelten**

$\emptyset$