Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Tangentenhomotopie mit fester Schrittweite.

Aufgabenstellung

Gegeben sei das Problem

$$f(x) = 0$$

mit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt. Gilt $\operatorname{rank} f_x(x) = n$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x) = 0$ und kennt man ein $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x_0) = 0$, so kann man nach dem Satz über implizite Funktionen die zugehörige Lösungsmenge in einer Umgebung von x_0 als Graphen einer Funktion in einer Variablen auffassen. Dabei ist $t_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$f_x(x_0)t_0 = 0, \quad t_0^T t_0 = 1$$

die Richtung der zu x_0 gehörigen Tangenten an diesen Graphen. Man kann sich jetzt mit folgender Herangehensweise sukzessive Punkte in der Menge $f^{-1}(\{0\})$ verschaffen. Zu gegebener (fester) Schrittweite σ setzt man

$$\hat{x}_1^0 = x_0 + \sigma t_0$$

und löst das Problem $F(x) = 0$ gegeben durch

$$f(x) = 0, \quad t_0^T(x - \hat{x}_1^0) = 0$$

mit Hilfe des Newton-Verfahrens

$$\hat{x}_1^{\nu+1} = \hat{x}_1^\nu - F_x(\hat{x}_1^\nu)^{-1} F(\hat{x}_1^\nu).$$

Dieses konvergiert für hinreichend kleinen Betrag von σ. Bezeichnet man den zugehörigen Grenzwert mit x_1, so kann man die beschriebene Vorgehensweise mit x_1 statt x_0 fortsetzen. Dabei ist das zugehörige t_1 so zu wählen, daß $t_0^T t_1 > 0$ ist.
Man implementiere das beschriebene Verfahren und teste es an

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_3)/10000 + (x_1 - x_2)/39 + (x_1 - x_7)/51 = 0,\\
&(x_2 - x_6)/10 + (x_2 - x_1)/39 + 5.6 \cdot 10^{-8}(\exp(25x_2) - 1) = 0,\\
&(x_3 - x_1)/10000 + (x_3 - x_4)/25.5 = 0,\\
&(x_4 - x_3)/25.5 + (x_4 - x_5) + x_4/0.62 = 0,\\
&(x_5 - x_6)/13 + (x_5 - x_4) + 5.6 \cdot 10^{-8}(\exp(25x_5) - 1) = 0,\\
&(x_6 - x_2)/10 + (x_6 - x_5)/13 + (x_6 - 7.65\,\operatorname{atan}(1962(x_3 - x_1)))/0.201 = 0
\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&x_5(1-x_3)v_1 - x_3 = 0, && \\
&22x_5(1-x_3)v_1 - 30x_1 = 0, && v_1 = \exp(10x_1/(1+0.01x_1)), \\
&x_3 - x_4 + x_5(1-x_4)v_2 = 0, && v_2 = \exp(10x_2/(1+0.01x_2)). \\
&10x_1 - 30x_2 + 22x_5(1-x_4)v_2 = 0, &&
\end{aligned}
$$

Dabei achte man bei der Wahl von σ (einschließlich des Vorzeichens) und der Zahl der durchzuführenden Schritte, daß man ausgehend von x_0 den Graphen in beide Richtungen so weit bestimmt, daß die wesentlichen Eigenschaften des Graphen erfaßt werden.

Quellen

$\emptyset$