

Arbeitsblatt
Numerisches Praktikum

Thema

Implementation des gewöhnlichen, vereinfachten und Quasi-Newton-Verfahrens einschließlich Vergleich.

Aufgabenstellung

Zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen $f(x) = 0$ verwendet man Verfahren der Form

$$x_{\nu+1} = x_{\nu} - A_{\nu}^{-1} f(x_{\nu}), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei x_0 gegeben ist. Für $A_{\nu} = f'(x_{\nu})$ erhält man das Newton-Verfahren, für $A_{\nu} = f'(x_0)$ das vereinfachte Newton-Verfahren. Eine wichtige Variante ist das sogenannte Quasi-Newton-Verfahren, bei der $A_{\nu+1}$ aus A_{ν} durch eine bestimmte Aufdatierung vom Rang 1 (sogenannte Broyden-Aufdatierung) gewonnen wird. Auch hier kommt man wie beim vereinfachten Newton-Verfahren mit einer Dreieckszerlegung (nämlich von $A_0 = f'(x_0)$) aus, wenn man die rekursive Darstellung

$$A_{\nu+1}^{-1} = \left(I + \frac{\Delta x_{\nu+1} \Delta x_{\nu}^T}{\Delta x_{\nu}^T \Delta x_{\nu}} \right) A_{\nu}^{-1}$$

verwendet. Dabei ist $x_{\nu+1} = x_{\nu} + \Delta x_{\nu}$ mit

$$\Delta x_{\nu} = \frac{\Delta \bar{x}_{\nu}}{1 - \alpha_{\nu}}, \quad \alpha_{\nu} = \frac{\Delta \bar{x}_{\nu}^T \Delta x_{\nu-1}}{\Delta x_{\nu-1}^T \Delta x_{\nu-1}}, \quad \Delta \bar{x}_{\nu} = -A_{\nu-1}^{-1} f(x_{\nu})$$

für $\nu \geq 1$ und $\Delta x_0 = -f'(x_0)^{-1} f(x_0)$. Man implementiere alle drei Varianten und vergleiche sie an den Problemen aus Beispiel 4.30, Beispiel 4.31 und Aufgabe 4.9 (siehe Anlage) des Buches

DEUFLHARD/HOHMANN: Numerische Mathematik I — Eine algorithmisch orientierte Einführung, 2. Auflage, Walter de Gruyter.

Insbesondere untersuche man, wie groß der Parameter λ in Beispiel 4.30 gewählt werden kann, um noch Konvergenz ausgehend von der Lösung für $\lambda = 0$ zu erzielen.

Quellen

\emptyset