Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Romberg-Quadratur mit Schrittweitensteuerung bei fester Ordnung.

Aufgabenstellung

Zur Berechnung von Integralen

$$I = \int_a^b f(s)\,ds$$

programmiere man die Romberg-Quadratur mit Schrittweitensteuerung bei fester Ordnung. Ist t die aktuelle Stelle und h die aktuelle Schrittweite, so ist das Verfahren folgendermaßen festgelegt. Mit $n_i = 2^i$, $i = 0, \ldots, N$, definiert man $h_i = h/n_i$ und bestimmt als Approximationen an

$$\Delta I = \int_t^{t+h} f(s)\,ds$$

die Werte der summierten Trapezregel

$$T(h_i) = \frac{h_i}{2}\Big(f(t) + 2f(t+h_i) + \cdots + 2f(t+(n_i-1)h_i)) + f(t+h)\Big).$$

Durch

$$p(x_i) = T(h_i), \quad x_i = h_i^2, \quad i = 0, \ldots, N$$

ist dann ein Polynom p vom Grad höchstens N festgelegt. Seien nun $P_{k,l}$ die Einträge des Tableaus, das man bei der Berechnung von $p(0)$ mittels des Verfahrens von Aitken/Neville erhält. Dann gilt für hinreichend glattes f

$$|\Delta I - P_{k,l}| \le Ch^{2l+3}.$$

Legt man durch Vorgabe von N die Ordnung des Verfahrens fest, so kann man als Fehlerschätzung

$$\mathtt{ERR} = |P_{0,N} - P_{1,N-1}|$$

verwenden. Der aktuelle Schritt wird akzeptiert, falls

$$\mathtt{ERR} \le \mathtt{TOL}$$

für eine vorgegebene Toleranz $\mathtt{TOL}$. Die neue Schrittweite ergibt sich gemäß

$$\overline{h} = \mathtt{RED} \cdot h \cdot \sqrt[2N+1]{\frac{\mathtt{TOL}}{\mathtt{ERR} + \mathtt{SAV}}},$$

etwa mit $\mathtt{RED} = 0.9$ und $\mathtt{SAV} = \mathtt{eps}$. Zusätzlich sollte die Änderung der Schrittweite entsprechend

$$\mathtt{RMIN} \leq \frac{\overline{h}}{h} \leq \mathtt{RMAX}$$

eingeschränkt werden, etwa mit $\mathtt{RMIN} = 0.2$ und $\mathtt{RMAX} = 2$. Man teste die erhaltene Implementierung an fünf verschiedenen Testbeispielen. Insbesondere untersuche man die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen und die erreichte Genauigkeit in Abhängigkeit der durch N vorgegebenen Ordnung des Verfahrens und der Toleranz $\mathtt{TOL}$.

Quellen

$\emptyset$