Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Vergleich zweier Verfahren zum Fitten von Punkten mittels eines Kreises.

Aufgabenstellung

Die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ sollen bestmöglich durch einen Kreis approximiert werden. Ein Kreis in allgemeiner Lage wird beschrieben durch die Menge der Lösungen (x, y) der skalaren Gleichung $f(x, y; r, x_0, y_0) = 0$ gegeben durch

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Dabei bezeichnet r den Radius und (x_0, y_0) die Koordinaten des Mittelpunkts. Gesucht ist nun ein Kreis mit

$$\|F(r, x_0, y_0)\|_2 = \min!,$$

wobei

$$F_i(r, x_0, y_0) = f(x_i, y_i; r, x_0, y_0), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Das so entstehende nichtlineare Ausgleichsproblem der Form $\|F(w)\|_2 = \min!$ kann mit dem sogenannten Gauß-Newton-Verfahren

$$w^{m+1} = w^m + \Delta w^m, \quad \|F(w^m) + F_w(w^m)\Delta w^m\|_2 = \min!$$

bestimmt werden.
Man implementiere das Gauß-Newton-Verfahren, indem man das in jedem Iterationsschritt anfallende lineare Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung löst. Außerdem implementiere man das in

Späth: Least-Squares Fitting by Circles, Computing 57, 179-185 (1996)

beschriebene Verfahren. Man vergleiche die beiden Verfahren anhand der vier in den Quellen genannten Datensätzen sowie an weiteren Beispielen.

Quellen

Die zu verwendenden Datensätze findet man unter

`http://www.math.uni-leipzig.de/~kunkel/numprak/daten/ellipse`k`.txt`

für $k = 1, 2, 3, 4$. Dabei steht in der ersten Zeile jeweils die Anzahl n der Datensätze und in den darauf folgenden n Zeilen die Werte x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$.