Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Fitten von Punkten mittels einer Ellipse.

Aufgabenstellung

Zur Steuerung eines Laserschneidegeräts muß eine Kamera so installiert werden, daß ihre Bildebene parallel zum Schneidetisch liegt. Um die Ausrichtung der Kamera messen und eventuell korrigieren zu können, wird eine Kreisscheibe auf den Schneidetisch gelegt und von der Kamera aufgenommen. Anschließend werden auf der Aufnahme eine gewisse Zahl n von Punkten (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$, auf dem Rand der Kreisscheibe in kartesischen Koordinaten ausgemessen. Die so gewonnenen Daten sollen nun durch eine Ellipse bestmöglich approximiert werden.

Eine Ellipse in allgemeiner Lage wird beschrieben durch die Menge der Lösungen (x, y) der skalaren Gleichung $f(x, y; a, b, x_0, y_0, \varphi_0) = 0$ gegeben durch

$$\frac{((x - x_0)\cos\varphi_0 - (y - y_0)\sin\varphi_0)^2}{a^2} + \frac{((x - x_0)\sin\varphi_0 + (y - y_0)\cos\varphi_0)^2}{b^2} = 1.$$

Dabei bezeichnen a, b die Länge der Halbachsen, (x_0, y_0) die Koordinaten des Mittelpunkts und φ_0 den Winkel zwischen der einen Halbachse und der x-Achse. Gesucht ist nun eine Ellipse mit

$$\|F(a, b, x_0, y_0, \varphi_0)\|_2 = \min!,$$

wobei

$$F_i(a, b, x_0, y_0, \varphi_0) = f(x_i, y_i; a, b, x_0, y_0, \varphi_0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Das so entstehende nichtlineare Ausgleichsproblem der Form $\|F(z)\|_2 = \min!$ kann mit dem sogenannten Gauß-Newton-Verfahren

$$z^{m+1} = z^m + \Delta z^m, \quad \|F(z^m) + F_z(z^m)\Delta z^m\|_2 = \min!$$

bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Parameter $(a, b, x_0, y_0, \varphi_0)$ für $a = b$ nicht voneinander unabhängig sind.

Man überlege sich, wie man aus den gegebenen Daten eine sinnvolle Anfangsschätzung z^0 gewinnen kann. Man implementiere das Gauß-Newton-Verfahren, indem man das in jedem Iterationsschritt anfallende lineare Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung löst, und bestimme damit die bestapproximierenden Ellipsen zu den vier in den Quellen genannten Datensätzen.

Quellen

Die zu verwendenden Datensätze findet man unter

`http://www.math.uni-leipzig.de/~kunkel/numprak/daten/ellipse`k`.txt`

für $k = 1, 2, 3, 4$. Dabei steht in der ersten Zeile jeweils die Anzahl n der Datensätze und in den darauf folgenden n Zeilen die Werte x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$.