Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Das Verfahren von Remez.

Aufgabenstellung

Man schreibe ein Programm, das zu einer Funktion $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ die Bestapproximierende $p \in \Pi_n$ mittels des Verfahrens von Remez bestimmt. Dieses ist gegeben durch:

(0) Gegeben seien Knoten $t_i^{(0)}$, $i = 0,\ldots,n+1$, mit

$$a \le t_0^{(0)} < \cdots < t_{n+1}^{(0)} \le b.$$

Setze $m = 0$.

(1) Berechne das diskrete Proximum $p^{(m)} \in \Pi_n$ an f mit Fehlerfunktion $r^{(m)} = f - p^{(m)}$ und Fehler $\eta^{(m)}$. Bilden die $t_i^{(m)}$, $i = 0,\ldots,n+1$, eine Alternante von $r^{(m)}$, so ist $p^{(m)}$ die gesuchte Bestapproximierende. Andernfalls besitzt $r^{(m)}$ mindestens $n+2$ relative Extrema mit alternierenden Vorzeichen.

(2) Bestimme $n+2$ relative Extremstellen $t_i^{(m+1)}$, $i = 0,\ldots,n+1$, von $r^{(m)}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & a \le t_0^{(m+1)} < \cdots < t_{n+1}^{(m+1)} \le b,\\
\text{(b)} & |r^{(m)}(t_i^{(m+1)})| \ge |\eta^{(m)}|, \quad i = 0,\ldots,n+1,\\
\text{(c)} & \operatorname{sgn} r^{(m)}(t_i^{(m+1)}) = -\operatorname{sgn} r^{(m)}(t_{i+1}^{(m+1)}), \quad i = 0,\ldots,n,\\
\text{(d)} & \max\limits_{i=0,\ldots,n+1} |r^{(m)}(t_i^{(m+1)})| = \|r^{(m)}\|_\infty.
\end{array}$$

Setze $m = m+1$ und gehe nach (1).

Dabei heißen Punkte t_i, $i = 0,\ldots,n+1$, eine Alternante von $r \in C([a,b],\mathbb{R})$, wenn gilt

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & a \le t_0 < \cdots < t_{n+1} \le b,\\
\text{(b)} & \operatorname{sgn} r(t_i) = -\operatorname{sgn} r(t_{i+1}), \quad i = 0,\ldots,n,\\
\text{(c)} & |r(t_i)| = \|r\|_\infty, \quad i = 0,\ldots,n+1.
\end{array}$$

Außerdem bestimmt sich das diskrete Proximum $p \in \Pi_n$ an f zu den Stützstellen t_i, $i = 0,\ldots,n+1$, als die Interpolierende zu den Punkten $(t_i, f(t_i) - (-1)^i\eta)$, wobei der

Fehler η gegeben ist durch

$$\eta = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i f(t_i) \Big/ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \lambda_i, \quad \lambda_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{1}{t_i - t_j}.$$

Man teste das Programm insbesondere für $f(t) = \sin t$ mit $a = 0$, $b = \pi/2$, und für $f(t) = \exp t$ mit $a = 0$, $b = 1$, wobei man $n = 2, \ldots, 9$ wähle.

Quellen

$\emptyset$