Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Implementation einer Verallgemeinerung der schnellen Fourier-Transformation für eine beliebige Anzahl von Datenpunkten.

Aufgabenstellung

Zu Werten $t_j, f_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, N-1$, mit $N \in \mathbb{N}$ und $t_j = 2\pi j/N$ soll das zugehörige trigonometrische Interpolationspolynom

$$q(t) = \Re\Big(c_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} c_k z^k + c_{\frac{N}{2}} z^{\frac{N}{2}}\Big), \quad z = e^{it}$$

für gerades N bzw.

$$q(t) = \Re\Big(c_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} c_k z^k\Big), \quad z = e^{it}$$

für ungerades N rekursiv basierend auf folgendem Algorithmus bestimmt werden.
Sei $N = qr$ mit $q, r \in \mathbb{N}$ und sei q prim. Dann gilt

$$p(z) = \sum_{k=0}^{qr-1} f_k z^k = \sum_{l=0}^{q-1} z^l \sum_{k=0}^{r-1} f_{kq+l} z^{kq} = \sum_{l=0}^{q-1} z^l p_l(z^q).$$

und c kann rekursiv mittels

```
fft(f,c,N) {
    if (N==1) { c_0 = f_0; return; }
    c = 0;  ω = e^(-2πi/N);
    for l = 0,...,q-1 {
        g = (f_l, f_{q+l}, f_{2q+l}, ...);
        fft(g,d,r);
        c_j = c_j + ω^{jl} d_{j%r},  j = 0,...,N-1; }
    return; }
```

mit abschließender Skalierung mit $1/N$ berechnet werden. Dabei bezeichnet $j\%q$ den Rest, der bei der Division von j durch q bleibt.
Man implementiere obigen Algorithmus zur Bestimmung der Koeffizienten c sowie das Horner-Schema zur Auswertung von q an einer gegebenen Stelle $t \in [0, 2\pi)$. Man teste die Implementierung an einer Reihe von Problemen mit unterschiedlichem N.

Quellen

$\emptyset$