Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Interpolation mit Exponential-Splines.

Aufgabenstellung

Gegeben seien ein reelles abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit einem Gitter entsprechend

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

sowie reelle Werte f_i, $i = 0, \ldots, n$, und $\dot{f}_a, \dot{f}_b$. Gegeben seien weiter reelle Parameter $p_i > 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Der zugehörige Exponential-Spline $s \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ ist folgendermaßen festgelegt.
Mit $h_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, setzt man zunächst

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \dot{f}_a, \\
b_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\
b_n &= \dot{f}_b - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}
\end{aligned}$$

sowie

$$e_i = \Big(\frac{1}{h_i} - \frac{p_i}{s_i}\Big)\Big/p_i^2, \quad d_i = \Big(c_i \frac{p_i}{s_i} - \frac{1}{h_i}\Big)\Big/p_i^2, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

wobei

$$s_i = \sinh(p_i h_i), \quad c_i = \cosh(p_i h_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Danach bestimmt man die Größen w_i, $i = 0, \ldots, n$, aus dem symmetrischen tridiagonalen linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
d_0 w_0 + e_0 w_1 &= b_0, \\
e_{i-1} w_{i-1} + (d_{i-1} + d_i) w_i + e_i w_{i+1} &= b_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\
e_{n-1} w_{n-1} + d_{n-1} w_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Der Exponential-Spline s ist dann auf $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, gegeben durch

$$\begin{aligned}
s(t) = \frac{1}{p_i^2 s_i} \Big(w_i \sinh\big(p_i(t_{i+1} - t)\big) + w_{i+1} \sinh\big(p_i(t - t_i)\big)\Big) + \\
+ \Big(f_i - \frac{w_i}{p_i^2}\Big)\frac{t_{i+1} - t}{h_i} + \Big(f_{i+1} - \frac{w_{i+1}}{p_i^2}\Big)\frac{t - t_i}{h_i}.
\end{aligned}$$

Man implementiere das oben beschriebene Verfahren zur Bestimmung und Auswertung des Exponential-Splines. Dabei soll das auftretende lineare Gleichungssystem mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(n)$ Operationen gelöst werden. Man experimentiere mit verschiedenen, von Funktionen $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ entsprechend $f_i = f(t_i)$, $i = 0,\dots,n$, herrührenden, Datensätzen und dazu jeweils mit verschiedenen Wahlen der Parameter $p_i > 0$, $i = 0,\dots,n-1$. Insbesondere versuche man die Parameter so zu wählen, daß sich Konvexität bzw. Monotonie der Funktion f auf den Exponential-Spline s übertragen. Unter anderem verwende man

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| \geq 1, \\ 1+t & \text{für } t \in [-1,0], \\ 1-t & \text{für } t \in [0,+1], \end{cases} \quad t_i = i-3,\ i = 0,\dots,6, \quad \dot{f}_a = 0, \quad \dot{f}_b = 0$$

und

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| \geq 1, \\ \sqrt{1-t^2} & \text{für } |t| \leq 1, \end{cases} \quad t_i = i/8-2,\ i = 0,\dots,16, \quad \dot{f}_a = 0, \quad \dot{f}_b = 0.$$

Quellen

$\emptyset$