Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Konvergenzordnung bei Spline-Interpolation.

Aufgabenstellung

Man schreibe ein Unterprogramm, das zu einer Funktion $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ die Spline-Interpolierende s_h zu den Stützstellen

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \quad t_i = t_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

berechnet. Man unterscheide die Fälle

(a)	$\ddot{s}_h(a) = 0$, $\ddot{s}_h(b) = 0$;	(natürlicher Spline)
(b)	$\dot{s}_h(a) = \dot{f}(a)$, $\dot{s}_h(b) = \dot{f}(b)$;	(eingespannter Spline)
(c)	$\ddot{s}_h(a) = \ddot{f}(a)$, $\ddot{s}_h(b) = \ddot{f}(b)$.	

Weiterhin schreibe man ein Unterprogramm, mit dem man s_h sowie dessen Ableitungen $\dot{s}_h$ und $\ddot{s}_h$ an einer vorgegebenen Stelle t auswerten kann. Zu gegebenem f kann man sich dann durch

$$E_{h,k} = \|s_h^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \approx \max_{j=0,\ldots,10n} |s_h^{(k)}(\tau_j) - f^{(k)}(\tau_j)|, \quad \tau_j = t_0 + j\frac{h}{10}, \quad k = 0,1,2,$$

Schätzungen für die Fehler $E_{h,k}$ verschaffen. Mit dem Ansatz

$$E_{h,k} \doteq C_k h^{p_k}$$

kann man durch Vergleich zweier Schätzungen gemäß

$$E_{h_1,k} \doteq C_k h_1^{p_k}, \quad E_{h_2,k} \doteq C_k h_2^{p_k}$$

bzw.

$$p_k \doteq \frac{\log E_{h_1,k} - \log E_{h_2,k}}{\log h_1 - \log h_2}$$

schließlich Konvergenzordnungen p_k schätzen. Man bestimme solche Schätzungen für

$f(t) = \sin t$	auf $[-\pi,\pi]$,	$f(t) = \cos t$	auf $[-\pi,\pi]$,
$f(t) = \frac{1}{3}\lvert t\rvert \sin^2 t$	auf $[-\pi,\pi]$,	$f(t) = \sqrt{t}$	auf $[1,2]$,
$f(t) = \exp t$	auf $[-1,1]$,	$f(t) = (1+t^2)^{-1}$	auf $[-1,1]$

durch sukzessives Halbieren der Schrittweite h.

Quellen

$\emptyset$