Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Ein Gleichungslöser für Kuhn-Tucker-Matrizen.

Aufgabenstellung

Bei der Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen erhält man als Teilprobleme in der Regel lineare Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrizen K der Form

$$K = \begin{bmatrix} G & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $G \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ist. Sei im folgenden $\operatorname{rang} A = m$ sowie $Z^T G Z$ positiv definit, wobei die Spalten von Z eine Basis von $\operatorname{kern} A$ bilden.
Bei der numerischen Lösung solcher Gleichungssysteme kann man folgendermaßen die Struktur von K ausnutzen. Zunächst bestimmt man eine QR-Zerlegung von A^T gemäß

$$A^T = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei R eine nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix ist. Die orthogonale Matrix Q kann man entsprechend

$$Q = [\, V \quad Z \,]$$

mit $Z \in \mathbb{R}^{n,n-m}$ zerlegen. Es gilt dann $AZ = 0$ und die Spalten von Z bilden eine Orthonormalbasis von $\operatorname{kern} A$. Insbesondere folgt

$$K = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T G V & V^T G Z & R \\ Z^T G V & Z^T G Z & 0 \\ R^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Bestimmt man nun noch eine rationale Cholesky-Zerlegung von $Z^T G Z$ gemäß

$$Z^T G Z = L D L^T,$$

so hat man nach der entsprechenden Transformation von K im zugehörigen linearen Gleichungssystem nur noch Teilprobleme mit Dreiecksmatrizen zu lösen.
Man implementiere ein Unterprogramm, welches zu gegebenen Matrizen G und A die oben beschriebene Zerlegung berechnet, sowie ein Unterprogramm, welches zu so zerlegtem K und passender rechter Seite r die Lösung w von $Kw = r$ berechnet. Man teste die Unterprogramme an einer Reihe von Problemen unterschiedlicher Größe.

Quellen

$\emptyset$