Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Bestimmung der Moore-Penrose-Pseudoinversen mittels LR-Zerlegungen.

Aufgabenstellung

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit bekanntem Rang k. Ohne weitere Voraussetzung ist das zugehörige Problem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^m$ nicht wohlgestellt. Stattdessen betrachtet man das Ersatzproblem

$$\|x\|_2 = \min \text{ unter der Nebenbedingung } \|Ax - b\|_2 = \min.$$

Man kann zeigen, daß dieses immer eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt, die man in der Form

$$x = A^+ b$$

schreiben kann. Dabei ist $A^+ \in \mathbb{R}^{n,m}$ die sogenannte Moore-Penrose-Pseudoinverse von A. Diese ist eindeutig festgelegt durch die Eigenschaften

$$A = AA^+A, \quad A^+ = A^+AA^+, \quad (A^+A)^T = A^+A, \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

Zur Bestimmung von A^+ kann man folgendermaßen vorgehen. Zunächst wählt man Matrizen $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{n,n-k}$ und $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{m,m-k}$ so, daß die Matrix $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{m+n-k,m+n-k}$ mit

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} A & \tilde{Z} \\ \tilde{T}^T & 0 \end{bmatrix}$$

nichtsingulär ist. Typischerweise reicht es dazu, die Einträge von $\tilde{T}$ und $\tilde{Z}$ zufällig zu wählen. Anschließend bestimmt man Matrizen $T \in \mathbb{R}^{n,n-k}$ und $Z \in \mathbb{R}^{m,m-k}$ aus

$$\tilde{M} \begin{bmatrix} T \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix}, \quad \tilde{M}^T \begin{bmatrix} Z \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-k} \end{bmatrix}$$

mittels einer LR-Zerlegung von $\tilde{M}$. Damit bildet man die Matrix $M \in \mathbb{R}^{m+n-k,m+n-k}$ entsprechend

$$M = \begin{bmatrix} A & Z \\ T^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Die gesuchte Moore-Penrose-Pseudoinverse A^+ von A ergibt sich dann aus

$$M \begin{bmatrix} A^+ \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

mittels einer LR-Zerlegung von M.
Man schreibe ein Programm, das zu gegebener Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ auf die oben beschriebene Weise die Moore-Penrose-Pseudoinverse A^+ von A berechnet. Man teste die Implementierung an einer Reihe von (rangdefekten) Matrizen A unterschiedlicher Größe, indem man die obigen Eigenschaften von A^+ überprüft. Was passiert, wenn k nicht der Rang von A ist?

Quellen

$\emptyset$