Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

QR-Zerlegung mit Spaltentausch und Moore-Penrose-Pseudoinverse: Variante 2.

Aufgabenstellung

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Ohne weitere Voraussetzung ist das zugehörige Problem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^m$ nicht wohlgestellt. Stattdessen betrachtet man das Ersatzproblem

$$\|x\|_2 = \min \text{ unter der Nebenbedingung } \|Ax - b\|_2 = \min.$$

Man kann zeigen, daß dieses immer eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt, die man in der Form

$$x = A^+ b$$

schreiben kann. Dabei ist $A^+ \in \mathbb{R}^{n,m}$ die sogenannte Moore-Penrose-Pseudoinverse von A. Diese ist eindeutig festgelegt durch die Eigenschaften

$$A = AA^+A, \quad A^+ = A^+AA^+, \quad (A^+A)^T = A^+A, \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

Zur numerischen Lösung des obigen Ersatzproblems kann man die QR-Zerlegung folgendermaßen verallgemeinern. Ist $k = \operatorname{rang} A$, so soll A gemäß

$$Q^T A\Pi = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zerlegt werden, wobei $\Pi \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Permutationsmatrix und $R \in \mathbb{R}^{k,k}$ eine nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix ist. Zur numerischen Bestimmung einer solchen Zerlegung tauscht man in A zunächst eine Spalte maximaler euklidischer Norm nach vorn (beschrieben etwa durch Π_1) und bestimmt danach wie bei der normalen QR-Zerlegung eine Householder-Transformation H_1 derart, daß

$$H_1^T A\Pi_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & * \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}.$$

Anschließend verfährt man entsprechend mit $\tilde{A}$ usw. bis es keine Restmatrix mehr gibt oder die maximale euklidische Norm der Restspalten kleiner ist als $|r_{11}| \cdot \text{eps}$. Im letzteren Fall sieht man die restlichen Einträge als (eventuell durch Rundungsfehler verfälschte)

Nullen an und setzt den (numerischen) Rang k von A gleich der Anzahl der bis dahin abgearbeiteten Spalten.
Hat man eine Zerlegung von A der obigen Form bestimmt, so kann man mit Hilfe weiterer Householder-Transformationen eine Zerlegung der Form

$$Q^T A \Pi \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

erreichen, wobei $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ diese Householder-Transformationen beschreibt und $\hat{R} \in \mathbb{R}^{k,k}$ eine nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix ist. Man überlege sich, wie man bei der Konstruktion der Householder-Transformationen ausnutzen kann, daß R bereits obere Dreiecksgestalt besitzt. Die Moore-Penrose-Pseudoinverse von A ist dann gegeben durch

$$\hat{Q}^T \Pi^T A^+ Q = \begin{bmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \hat{R}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man schreibe ein Programm, das zu gegebener Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ die obige Zerlegung und damit auch den numerischen Rang von A bestimmt und daraus die Moore-Penrose-Pseudoinverse A^+ von A berechnet. Man teste die Implementierung an einer Reihe von (rangdefekten) Matrizen A unterschiedlicher Größe, indem man die obigen Eigenschaften von A^+ überprüft.

Quellen

$\emptyset$