Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

QR-Zerlegung mit Spaltentausch und Moore-Penrose-Pseudoinverse: Variante 1.

Aufgabenstellung

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Ohne weitere Voraussetzung ist das zugehörige Problem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^m$ nicht wohlgestellt. Stattdessen betrachtet man das Ersatzproblem

$$\|x\|_2 = \min \text{ unter der Nebenbedingung } \|Ax - b\|_2 = \min.$$

Man kann zeigen, daß dieses immer eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt, die man in der Form

$$x = A^+ b$$

schreiben kann. Dabei ist $A^+ \in \mathbb{R}^{n,m}$ die sogenannte Moore-Penrose-Pseudoinverse von A. Diese ist eindeutig festgelegt durch die Eigenschaften

$$A = AA^+A, \quad A^+ = A^+AA^+, \quad (A^+A)^T = A^+A, \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

Zur numerischen Lösung des obigen Ersatzproblems kann man die QR-Zerlegung folgendermaßen verallgemeinern. Ist $k = \operatorname{rang} A$, so soll A gemäß

$$Q^T A \Pi = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zerlegt werden, wobei $\Pi \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Permutationsmatrix und $R \in \mathbb{R}^{k,k}$ eine nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix ist. Zur numerischen Bestimmung einer solchen Zerlegung tauscht man in A zunächst eine Spalte maximaler euklidischer Norm nach vorn (beschrieben etwa durch Π_1) und bestimmt danach wie bei der normalen QR-Zerlegung eine Householder-Transformation H_1 derart, daß

$$H_1^T A \Pi_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & * \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}.$$

Anschließend verfährt man entsprechend mit $\tilde{A}$ usw. bis es keine Restmatrix mehr gibt oder die maximale euklidische Norm der Restspalten kleiner ist als $|r_{11}| \cdot \text{eps}$. Im letzteren Fall sieht man die restlichen Einträge als (eventuell durch Rundungsfehler verfälschte)

Nullen an und setzt den (numerischen) Rang k von A gleich der Anzahl der bis dahin abgearbeiteten Spalten.
Hat man eine Zerlegung von A der obigen Form bestimmt, so ist die Moore-Penrose-Pseudoinverse von A gegeben durch

$$\Pi^T A^+ Q = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} (I - VM^{-1}V^T)R^{-1} & 0 \\ M^{-1}V^T R^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

mit $V = R^{-1}S$ und $M = I + V^T V$.
Man schreibe ein Programm, das zu gegebener Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ die obige Zerlegung und damit auch den numerischen Rang von A bestimmt und daraus die Moore-Penrose-Pseudoinverse A^+ von A berechnet. Man nutze dabei aus, daß M symmetrisch und positiv definit ist. Man teste die Implementierung an einer Reihe von (rangdefekten) Matrizen A unterschiedlicher Größe, indem man die obigen Eigenschaften von A^+ überprüft.

Quellen

$\emptyset$