Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Vergleich dreier Methoden zur linearen Ausgleichsrechnung.

Aufgabenstellung

Die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von

$$\|Ax - b\|_2 = \min,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ vollen Spaltenrang besitzt und $b \in \mathbb{R}^m$ ist, ist durch die Lösung von

$$A^T A x = A^T b$$

gegeben, die man mittels Cholesky-Zerlegung bestimmen kann. Hat man mit

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R \text{ nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix},$$

eine QR-Zerlegung von A, so ist x auch Lösung von

$$Rx = c, \quad Q^T b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

In einer dritten Methode verwendet man eine Darstellung von A der Form

$$A\Pi = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R \text{ nichtsinguläre obere Dreiecksmatrix},$$

wobei die Permutation Π dadurch bestimmt wird, daß man bei Verwendung von Householder-Transformationen zur Bestimmung einer QR-Zerlegung in jedem Eliminationsschritt die Restspalte der aktuellen Matrix zur Bestimmung der Householder-Transformation verwendet, die die größte euklidische Norm besitzt. Um in diesem Fall eine obere Dreiecksmatrix R zu erhalten, sind die Spalten von A entsprechend zu tauschen. Für die Lösung x des linearen Ausgleichsproblems gilt hier

$$x = \Pi u, \quad Ru = c, \quad Q^T b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Man implementiere alle drei Methoden und vergleiche sie an Hand des Problems

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1},$$
$$b = (b_i), \quad b_i = a_{i1} + 2a_{i2} + \cdots + n a_{in}$$

für $m, n \in \{2, 3, \ldots, 15\}$, $m \geq n$.

Quellen

$\emptyset$