Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2022/23

Übungen zur Vorlesung

Numerik 2

(45) Damit das Stabilitätsgebiet

$$\mathbb{G} = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid \varrho(\lambda) - z\sigma(\lambda) \text{ erfüllt das Wurzelkriterium}\}$$

eines linearen Mehrschrittverfahrens unbeschränkt sein kann, darf σ keine Wurzeln λ mit $|\lambda| > 1$ besitzen. Für die Adams-Moulton-Verfahren zeige man:

(a) Es gilt $\beta_l < 0$ für $k-l$ gerade bzw. $\beta_l > 0$ für $k-l$ ungerade, $l = 0, \ldots, k-1$, sowie $\beta_k > 0$. Für $k \geq 2$ gilt außerdem $\beta_k < 1/2$.

(b) Für $\lambda \to -\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt $\sigma(\lambda) \to \infty$ für k gerade bzw. $\sigma(\lambda) \to -\infty$ für k ungerade.

(c) Ist $k \geq 2$, so gilt $\sigma(-1) < 0$ für k gerade bzw. $\sigma(-1) > 0$ für k ungerade.

(d) Ist $k \geq 2$, so besitzt das Polynom σ eine reelle Nullstelle $\lambda \in (-\infty, -1)$.

(46) Man bestimme die zum Randwertproblem

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

gehörige Greensche Funktion.

(47) Man zeige, daß das Randwertproblem

$$-\ddot{x} + q(t)x = g(t), \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b$$

mit $g \in C([a,b], \mathbb{R})$ und $q \in C([a,b], \mathbb{R}_0^+)$ eine (global) eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Zur Abschätzung von $W(b,a)$ verwende man die Picard-Iteration.

(48) Gegeben sei

$$M = \begin{bmatrix} -W(t_1, t_0) & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -W(t_m, t_{m-1}) & I \\ A & & & B \end{bmatrix}$$

mit $E = A + BW(t_m, t_0)$ nichtsingulär. Man zeige, daß M in diesem Fall nichtsingulär ist mit

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} G(t_0,t_1) & \cdots & G(t_0,t_m) & W(t_0,t_0)E^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ G(t_m,t_1) & \cdots & G(t_m,t_m) & W(t_m,t_0)E^{-1} \end{bmatrix}.$$

Abgabe am Donnerstag, 19.01.2023, 10:45 Uhr