Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2022/23

Übungen zur Vorlesung
Numerik 2

(41) Sei x^* ein Fixpunkt von $\varphi \in C^1(\mathbb{D}, \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei

$$\|\varphi'(x^*)\| < 1$$

in einer Operatornorm. Man zeige, daß x^* asymptotisch stabil in dem Sinn ist, daß es eine Umgebung $\mathbb{U}$ von x^* gibt mit

$$x_k \to x^* \text{ für } k \to \infty$$

für alle $x_0 \in \mathbb{U}$, wobei $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist.

(42) Diskretisiert man

$$\dot{x} = x(1-x), \quad x(0) = x_0 > 0$$

mit dem expliziten Eulerverfahren, so ist die numerische Lösung gegeben durch

$$x_{i+1} = x_i + hx_i(1-x_i), \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Man zeige, daß $x^* = 1$ asymptotisch stabiler kritischer Punkt der obigen Differentialgleichung ist.
(b) Man zeige, daß $x^* = 1$ asymptotisch stabiler Fixpunkt der obigen Differenzengleichung ist, falls $h \in (0, 2)$ ist.
(c) Man schreibe ein Programm zur Berechnung von $x_1, \ldots, x_N$ zu gegebenem $x_0 \in (0, 1)$, $h > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ und beobachte den Lösungsverlauf für verschiedene Werte von h. Insbesondere wähle man

$$h = 1.00, 2.20, 2.50, 2.55, 2.83.$$

Konvergiert die Folge oder zeigt sie eine andere Besonderheit?

(43) Man bestimme alle symmetrischen Runge-Kutta-Verfahren mit $p = 2$ und $s = 2$ und deren Stabilitätsfunktionen. Für welche Parameterwerte ergibt sich die implizite Trapezregel bzw. die implizite Mittelpunktsregel? Man zeige außerdem, daß das durch

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}(3-2\sqrt{3}) \\ \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(3+2\sqrt{3}) & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegebene Runge-Kutta-Verfahren A-stabil ist.

(44) Man zeige, daß für SDIRK-Verfahren mit $s = 2$ und $p = 2$

$$E(y) = y^4(2\gamma - 1)^2(\gamma - \tfrac{1}{4})$$

gilt.

Abgabe am Donnerstag, 12.01.2023, 10:45 Uhr