Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2022/23

Übungen zur Vorlesung
Numerik 2

(33) Gegeben sei eine skalare Differentialgleichung mit $f(t,x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die durch den Korrektor eines Prädiktor-Korrektor-Verfahren vermittelte Fixpunktiteration kontrahierend ist.

(34) Man zeige, daß das zu einem Runge-Kutta-Verfahren adjungierte Verfahren wieder ein Runge-Kutta-Verfahren ist, das durch

$$\begin{array}{c|c} c^* & A^* \\ \hline & b^{*T} \end{array}$$

mit

$$A^* = eb^T - A, \quad b^* = b, \quad c^* = e - c$$

oder

$$A^* = E(eb^T - A)E, \quad b^* = Eb, \quad c^* = e - Ec$$

gegeben ist, wobei

$$e = (1, \dots, 1)^T, \quad E = (e_s, \dots, e_1).$$

(35) Führt man bei einem linearen Mehrschrittverfahren

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha_l x_l = h \sum_{l=0}^{k} \beta_l f(t_l, x_l)$$

die Transformation

$$h \to -h, \quad t_l \to t_{k-l}, \quad x_l \to x_{k-l}$$

durch, so erhält man das dazu adjungierte lineare Mehrschrittverfahren

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha_l^* x_l = h \sum_{l=0}^{k} \beta_l^* f(t_l, x_l).$$

Man bestimme die Koeffizienten α_l^* und β_l^* in Abhängigkeit der Koeffizienten α_l und β_l und gebe Bedingungen dafür an, daß ein lineares Mehrschrittverfahren symmetrisch ist, d. h. mit seinem adjungierten Verfahren übereinstimmt.

(36) Die Größen $T_{i,k}$, $1 \leq k \leq i \leq 2$, seien mittels des Verfahrens von Gragg mit Extrapolation zu der durch $n_i = 2i$ gegebenen Schrittweitenfolge gewonnen worden. Man bestimme die Koeffizienten der dazu gehörenden Runge-Kutta-Verfahren.

Abgabe am Donnerstag, 15.12.2022, 10:45 Uhr