Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2022/23

Übungen zur Vorlesung

**Numerik 2**

(29) Zur Durchführung eines Mehrschrittverfahrens mit variabler Schrittweite und variabler Ordnung werden die Größen

$$g_m(r) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \prod_{j=1}^{m} (\tau - t_{i-j})(\tau - t_i)^{r-1} d\tau, \quad m \geq 0, \quad r \geq 1,$$

benötigt. Man zeige, daß für diese die Beziehungen

(a) $$g_0(r) = -\frac{(-h_i)^r}{r}, \quad r \geq 1,$$

(b) $$g_1(1) = \frac{1}{2} h_i^2,$$

(c) $$g_1(r+1) = -\frac{r}{r+2} h_i g_1(r), \quad r \geq 1,$$

(d) $$g_m(r) = g_{m-1}(r+1) + (t_i - t_{i-m}) g_{m-1}(r), \quad m \geq 1, \quad r \geq 1$$

gelten.

(30) Man zeige, daß man Runge-Kutta-Verfahren in der Form

$$X_{i+1} = (\tilde{A} \otimes I) X_i + h(\tilde{B} \otimes I) F(X_{i+1})$$

schreiben kann. Insbesondere zeige man, daß Runge-Kutta-Verfahren im hier verwendeten Sinn stets stabil sind.
Hinweis: Man ersetze die $k_i$ durch

$$Y_i = x_0 + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j.$$

(31) Man zeige, daß man lineare Mehrschrittverfahren in der Form

$$X_{i+1} = (\tilde{A} \otimes I) X_i + h(\tilde{B} \otimes I) F(X_{i+1})$$

schreiben kann, und diskutiere, wie sich Konsistenz- und Stabilitätsvoraussetzungen darauf übertragen.

(32) Man schreibe ein Unterprogramm, das zu den Daten $f, t_0, x_0, h, N$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad T = t_0 + Nh$$

unter Verwendung eines PECE-Verfahrens auf der Basis des Verfahrens aus Beispiel 3.5 der Vorlesung als Prädiktor und des Adams-Moulton-Verfahrens mit $k = 3$ als Korrektor mit konstanter Schrittweite löst und den Wert von $x(T)$ zurückgibt. Die Approximationen $x_1$ und $x_2$ berechne man dabei mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren. Man teste die Implementierung am Beispiel

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T = 1$$

für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ bzw. für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -100$, indem man $x(1)$ mit $x_N$ für verschiedene Schrittweiten $h$ vergleicht.

Abgabe am Donnerstag, 08.12.2022, 10:45 Uhr