Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2022/23

Übungen zur Vorlesung

Numerik 2

(25) Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{C}^n$ und $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ nichtsingulär. Man zeige, daß dann durch $\|x\|_S = \|Sx\|$ eine weitere Vektornorm auf $\mathbb{C}^n$ definiert wird. Wie hängt die zugehörige durch

$$\|A\|_S = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_S}{\|x\|_S}$$

definierte Operatornorm für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit der zu $\|\cdot\|$ gehörigen Operatornorm zusammen?

(26) Sei $\varrho(A)$ der Spekralradius von $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Man zeige:
(a) Für jede Operatornorm $\|\cdot\|$ gilt $\varrho(A) \leq \|A\|$.
(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Operatornorm $\|\cdot\|$ mit $\|A\| \leq \varrho(A) + \varepsilon$.
Hinweis: Man transformiere zunächst auf Jordansche Normalform und verwende dann eine Ähnlichkeitstransformation mit $\operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$. Außerdem beachte man Aufgabe 25.

(27) Man prüfe, ob das Mehrschrittverfahren

$$x_4 - x_0 = \frac{h}{3}(8f(t_3, x_3) - 4f(t_2, x_2) + 8f(t_1, x_1))$$

konvergent ist.

(28) Gegeben sei ein Polynom ϱ vom Grad k mit $\varrho(1) = 0$. Man zeige, daß dazu ein eindeutig bestimmtes Polynom σ vom Grad höchstens k derart existiert, daß das zugehörige Mehrschrittverfahren mindestens die Ordnung $k + 1$ besitzt.

Abgabe am Donnerstag, 01.12.2022, 10:45 Uhr