

Übungen zur Vorlesung
Numerik 2

- (17) Man bestimme dasjenige Runge-Kutta-Verfahren, das man gemäß der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 2.15 bei der Kombination der Trapezregel mit dem expliziten Eulerverfahren erhält.

- (18) Das durch

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegebene Runge-Kutta-Verfahren werde auf das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1$$

angewendet. Für die zugehörigen asymptotischen Entwicklungen des lokalen und globalen Fehlers zeige man, daß

$$d_3(t) = \frac{1}{6}e^t, \quad d_4(t) = \frac{1}{24}e^t, \quad e_2(t) = \frac{1}{6}te^t.$$

- (19) Gegeben sei das sogenannte Lotka-Volterra-System

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

- (a) Man zeige, daß man dieses System mittels einer Transformation der Form

$$u(\tau) = \mu x(\lambda\tau), \quad v(\tau) = \nu y(\lambda\tau)$$

mit $\lambda, \mu, \nu > 0$ auf die Form

$$\dot{u} = u(1 - v), \quad \dot{v} = -cv(1 - u)$$

mit $c > 0$ bringen kann.

- (b) Man zeige, daß die Funktion $H: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D} = \{(u, v) \mid u, v > 0\}$ gegeben durch

$$H(u, v) = c(u - \log u) + (v - \log v)$$

entlang jeder Lösung des transformierten Systems konstant ist.

- (c) Man zeige, daß H auf jeder Kurve der Form $v = u^d$, $d \in \overline{\mathbb{R}}$, mit der Konvention $u = 1$ für $d = \pm\infty$, in $(u, v) = (1, 1)$ ein Minimum $z_{\min}$ besitzt und jeden Wert $z > z_{\min}$ genau zweimal annimmt. Man begründe damit, daß alle Lösungen der transformierten Differentialgleichung mit $u(t_0), v(t_0) > 0$ in $\mathbb{D}$ bleiben und periodisch sind.
- (d) Seien u_k, v_k die zum transformierten Problem mit dem expliziten Euler-Verfahren berechnete numerische Lösung. Man zeige, daß für hinreichend kleines $h > 0$ und $(u_k, v_k) \neq (1, 1)$

$$H(u_{k+1}, v_{k+1}) > H(u_k, v_k)$$

gilt. Was bedeutet das für die numerische Lösung? Man führe entsprechende numerische Experimente durch.

- (20) Man schreibe ein Unterprogramm, das zu den Daten f, t_0, x_0, h, T sowie TOL das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T]$$

unter Verwendung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit auf Richardson-Extrapolation basierender Schrittweitensteuerung löst und den Wert von $x(T)$ zurückgibt. Man teste die Implementierung am Beispiel

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T = 1$$

für $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ bzw. für $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -100$ sowie an der Quadraturaufgabe

$$\dot{x} = \frac{c}{\cosh^2(ct)}, \quad c = 100, \quad x(-1) = \tanh(-c), \quad T = 1.$$

Abgabe am Donnerstag, 17.11.2022, 10:45 Uhr