Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2022/23

Übungen zur Vorlesung

Numerik 2

(9) Man berechne alle numerischen Lösungen x_1 des (skalaren) Anfangswertproblems

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1,$$

die man mit Hilfe des impliziten Eulerverfahrens bei Verwendung einer Schrittweite $h \geq 0$ erhält, und skizziere den zugehörigen Graphen

$$\mathbb{G} = \{(h, x_1) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_0 + h\Phi(x_0, x_1; h)\}.$$

(10) Gegeben sei ein numerisches Verfahren der Form

$$x_{i+1} = x_i + h\Phi(t_i, x_i; h)$$

mit $h = \frac{T-t_0}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ und $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, \ldots, N$. Weiter gelte

$$\|\Phi(t, u; h) - \Phi(t, v; h)\| \leq K\|u - v\|$$

mit $K > 0$ für alle $t \in [t_0, T]$ und alle $u, v \in \mathbb{R}^n$. Außerdem besitze das Verfahren die Ordnung p.

(a) Man zeige, daß

$$\|x(t_{i+1}) - x_{i+1}\| \leq Ch^{p+1} + (1 + hK)\|x(t_i) - x_i\|, \quad i = 0, \ldots, N-1,$$

mit einer von i unabhängigen Konstanten C gilt.

(b) Man beweise Satz 2.7 mit Hilfe von (a) ohne Verwendung des Fundamentallemmas.

(11) Gegeben sei ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p. Man zeige, daß die zugehörige Quadraturformel mindestens Ordnung p besitzt, d. h., man zeige, daß

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt = h\sum_{i=1}^{s} b_i f(t_0 + c_i h)$$

für alle Polynome f mit $\operatorname{grad} f \leq p - 1$ gilt.

(12) Man schreibe ein Unterprogramm, das zu den Daten f, t_0, x_0, h, N das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad T = t_0 + Nh$$

unter Verwendung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit konstanter Schrittweite löst und den Wert von $x(T)$ zurückgibt. Man teste die Implementierung am Beispiel

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T = 1$$

für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ bzw. für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -100$, indem man $x(1)$ mit x_N für verschiedene Schrittweiten h vergleicht.

Abgabe am Donnerstag, 03.11.2022, 10:45 Uhr