

Übungen zur Vorlesung
Numerik 2

- (1) Man bestimme alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0.$$

Man deute das Resultat mit Hilfe der bekannten Existenz- und Eindeutigkeitsätze.

- (2) Sei $c > 0$ sowie $x_0 > 0$. Man bestimme das maximale Existenzintervall für eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = cx^2, \quad x(0) = x_0.$$

- (3) Sei $A \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{n,n})$. Man zeige, daß die Lösungen von

$$\dot{x} = A(t)x$$

einen n -dimensionalen Untervektorraum von $C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ bilden.

- (4) Gegeben seien die Banachräume

$$\mathbb{X} = \{x \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n) \mid x(t_0) = 0\}, \quad \mathbb{Y} = C([t_0, T], \mathbb{R}^n)$$

mit ihren Normen

$$\|x\|_{\mathbb{X}} = \|x\|_{\mathbb{Y}} + \|\dot{x}\|_{\mathbb{Y}}, \quad \|f\|_{\mathbb{Y}} = \max_{t \in [t_0, T]} \|f(t)\|_{\infty}.$$

Zu $A \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{n,n})$ ist durch

$$(Dx)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$$

ein Operator $D: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ definiert. Man zeige:

- (a) Der Operator D ist stetig, d. h. die Operatornorm

$$\|D\|_{\mathbb{Y} \leftarrow \mathbb{X}} = \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Dx\|_{\mathbb{Y}}}{\|x\|_{\mathbb{X}}}$$

ist beschränkt.

- (b) Der Operator D besitzt eine Inverse $D^{-1}: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$.
(c) Die Inverse D^{-1} ist stetig.