Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(33) Die Funktionen $T_k\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, seien definiert durch

$$T_k(t) = \frac{1}{2^{k-1}} \cos(k \arccos t).$$

Man zeige:

(a) Die Funktionen T_k genügen der Rekursion

$$T_{k+1}(t) = tT_k(t) - \frac{1}{4} T_{k-1}(t), \quad k \in \mathbb{N},$$

und es gilt $T_k \in \tilde{\Pi}_k = \{p \in \Pi_n \mid p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0\}$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Es gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(t) = 0 \iff t = \cos \frac{(2l-1)\pi}{2k} \text{ für ein } l \in \{1, \ldots, k\}$$

und

$$|T_k(t)| = \frac{1}{2^{k-1}} \iff t = \cos \frac{l\pi}{k} \text{ für ein } l \in \{0, \ldots, k\}$$

sowie

$$|T_k(t)| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ für } t \in [-1,1].$$

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ löst T_k auf $\tilde{\Pi}_k$ das Minimierungsproblem

$$\max_{t \in [-1,1]} |p(t)| = \min!$$

Wie sollte man bei der Polynom-Interpolation die Knoten wählen, damit die Abschätzungen für den Interpolationsfehler möglichst günstig werden? (Hinweis: Man betrachte $|\omega(t)|$!)

(8 Punkte)

(34) Man schreibe ein Unterprogramm zur Bestimmung des Interpolationspolynoms p zu gegebenen Daten $t_i, f_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$, in der Newtonschen Darstellung sowie ein Unterprogramm zur Auswertung des Interpolationspolynoms p zu gegebenen dividierten Differenzen und Auswertungsstelle $\bar{t}$. Mit Hilfe dieser Unterprogramme bestimme man das zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mit $f(t) = (1+t^2)^{-1}$ gehörige Interpolationspolynom $p \in \Pi_n$ mit $n = 20$ jeweils für

(a) äquidistante Knoten entsprechend $t_i = -5 + i/2$, $i = 0, \ldots, 20$,

(b) Tschebyscheff-Knoten für $n = 20$ zum Intervall $[-5, 5]$,

sowie jeweils die durch

$$E = \max_{\substack{t=-5+i/200 \\ i=0,\ldots,2000}} |f(t) - p(t)|$$

gegebene Schätzung des Interpolationsfehlers. Wo tritt der maximale Fehler auf? Man interpretiere die Ergebnisse.

(5 Punkte)

(35) Gegeben seien $t_j \in [0, 2\pi)$, $g_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, 2n$, mit $t_j \neq t_k$ für $j \neq k$.

(a) Man zeige, daß

$$f(t) = \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{t - t_k}{2}$$

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

mit reellen Koeffizienten a_k und b_k ist.

(b) Man zeige, daß das zu (t_j, g_j), $j = 0, \ldots, 2n$, gehörige trigonometrische Interpolationspolynom q gegeben ist durch

$$q(t) = \sum_{j=0}^{2n} g_j l_j(t)$$

mit

$$l_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{2n} \sin \frac{t - t_k}{2} \Bigg/ \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{2n} \sin \frac{t_j - t_k}{2}, \quad j = 0, \ldots, 2n.$$

(4 Punkte)

(36) In der Datei

`http://www.math.uni-leipzig.de/~kunkel/num1/fourier.txt`

findet man 4096 äquidistante, durch Multiplikation mit 32767 und Rundung auf eine ganze Zahl digitalisierte Werte v_j einer auf $[0, 1]$ periodischen Funktion, d. h.

$$t_j = \frac{2\pi j}{4096}, \quad f_j = \frac{v_j}{32767}, \quad j = 0, \ldots, 4095,$$

in der Notation der Vorlesung. Man implementiere die schnelle Fourier-Transformation und bestimme diejenigen Fourier-Koeffizienten c_k, $k = 0, \ldots, 4095$, für die $|c_k| > 10^{-3}$ gilt.

(4 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 09.06.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung