Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(29) Zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei $\det A$ zu berechnen.
   (a) Man bestimme (in erster Näherung) den Aufwand zur Berechnung von $\det A$, wenn man rekursiv den Entwicklungssatz von Laplace anwendet.
   (b) Man gebe ein effizientes Verfahren zur Berechnung von $\det A$ auf der Basis einer LR-Zerlegung von A an.
   (c) Man gebe ein effizientes Verfahren zur Berechnung von $\det A$ auf der Basis einer QR-Zerlegung von A an. (5 Punkte)

(30) Man implementiere die QR-Zerlegung auf der Basis von Householder-Transformationen und löse damit die linearen Gleichungssysteme aus Aufgabe 24. Für jedes Testbeispiel gebe man den größten (absoluten) Fehler der Komponenten von x sowie den betragskleinsten und betragsgrößten Diagonaleintrag von R aus der QR-Zerlegung von A an. Man vergleiche die Resultate mit denen der Gauß-Elimination.

(9 Punkte)

(31) Man verallgemeinere die Implementierung aus Aufgabe 30 entsprechend Algorithmus 2.20 der Vorlesung zur Lösung von Problemen der linearen Ausgleichsrechnung. In der Datei

`http://www.math.uni-leipzig.de/~kunkel/num1/infect.txt`

findet man die pro Tag gemeldete Zahl der Corona-Infizierten in Deutschland für den Monat März des Jahres 2020. Ausgehend von der Annahme eines exponentiellen Wachstums entsprechend

$$I(t) = c \exp(\lambda t),$$

wobei $I(t)$ die Anzahl der Infizierten zum Zeitpunkt t gemessen in Tagen sei, sollen die Parameter c und λ geschätzt werden. Dazu logarithmiert man die obige Beziehung und erhält mit

$$\log I(t) = \log c + \lambda t$$

ein lineares Modell, das für eine lineare Ausgleichsrechnung verwendet werden kann. Um eine zeitliche Veränderung der Verdoppelungszeit $T = \log 2/\lambda$ festzustellen, wählt man ein Zeitfenster $w \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und führt die lineare Ausgleichsrechnung für die Daten (t_k, f_k), $k = j, \ldots, j + w$, mit $t_k = k$ und

$f_k = \log I_k$ durch, wobei I_k die Anzahl der Infizierten am Tag k bezeichnet und $j \in \{1, \ldots, 31 - w\}$ ist. Mit dem implementierten Programm bestimme man für $w = 11$ und alle möglichen j die zugehörigen Parameter c und λ sowie die sich daraus ergebende Verdoppelungszeit T.

(4 Punkte)

(32) Gegeben seien $f_a, f_b, \dot{f}_a, \dot{f}_b \in \mathbb{R}$.

(a) Man zeige, daß es genau ein Polynom $p \in \Pi_3$ gibt, das

$$p(a) = f_a,\ p(b) = f_b,\ \dot{p}(a) = \dot{f}_a,\ \dot{p}(b) = \dot{f}_b$$

genügt (sogenannte kubische Hermite-Interpolation).

(b) Für die Darstellung

$$p(t) = f_a\varphi_a(t) + f_b\varphi_b(t) + \dot{f}_a\psi_a(t) + \dot{f}_b\psi_b(t)$$

von p bestimme man die Basisfunktionen $\varphi_a, \varphi_b, \psi_a, \psi_b$.

(6 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 02.06.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung